BURNDY
LIBRARY
Chartered in 1941
GIFT OF
BERN DIBNER

Va 488

II, 3 2 vols.

Mathematical MS

ca. 1770–81

25/2

Trattenimento su le Proporzioni per esercizio sopra i Logaritmi.

Proposta la ragione dè numeri 7:13, la ragione undicesima di essa è la ragione $\sqrt[11]{7} : \sqrt[11]{13}$; ma se quella si voglia esprimere sotto una figura somigliante a questa, cioè sotto due termini, che abbiano lo stesso segno radicale, sarà $\sqrt[11]{7^{11}.13^{0}} : \sqrt[11]{7^{0}.13^{11}}$, avvegnachè l'uno e l'altro dè numeri 13^{0}, 7^{0} con l'esponente zero non sia più nè meno chè l'unità: e quindi secondo ciò, che ho scritto altra volta, volendo continuar li termini, un dopo l'altro successivi, delle undici ragioni uguali, che giacciono fra li due 7:13, ovvero $\sqrt[11]{7^{11}.13^{0}} : \sqrt[11]{7^{0}.13^{11}}$, saranno li seguenti $\sqrt[11]{7^{11}.13^{0}} : \sqrt[11]{7^{10}.13^{1}} : \sqrt[11]{7^{9}.13^{2}} : \sqrt[11]{7^{8}.13^{3}} : \sqrt[11]{7^{7}.13^{4}} : \sqrt[11]{7^{6}.13^{5}} : \sqrt[11]{7^{5}.13^{6}} : \sqrt[11]{7^{4}.13^{7}} : \sqrt[11]{7^{3}.13^{8}} : \sqrt[11]{7^{2}.13^{9}} : \sqrt[11]{7^{1}.13^{10}} : \sqrt[11]{7^{0}.13^{11}}$; e tai termini sono realmente i precisi; ma se in qualche intelletto non suscitassero quella idea materiale, che gli facesse comprendere la loro formale quantità in relazione l'un dell'altro, e che si amasse meglio vederli espressi sensibilmente sotto numeri ampli per approssimazione: a fine di soddisfar a questo desiderio convien trovar due numeri, che abbiano fra di se la ragione di 7:13, che siano li più estesi, e che si comprendano nelle tavole piccole dè Logaritmi, le quali si sa, chè non oltrèpassano il 10000; e per conseguirli si potrà usare questo ripiego.

Si faccia il prodotto 91 delli due numeri proposti 7:13 fra di se moltiplicati; ed è manifesto, che da cadaun di questi sarà sempre divisibile ogni numero, che sia divisibile da quello. Perchè poi il 7 è poco più della metà del 13, si prenda il 5000, che è la metà del 10000 numero massimo dèlle tavole; e dividendolo per il 91, si osserva, che accresciuto di 5 unità, il 5005 contiene in se 55 volte il 91. Sia dunque sostituito il 5005 in luogo dèl 7; e fatta l'analogia 7:13::5005:9295, si troverà, che in luogo del 13 convien sostituire il quarto termine 9295; e però la ragion dè numeri 5005:9295 è la medesima che la ragion di 7:13; con che sarà facile, mediante l'uso dè logaritmi, trovar fra li due numeri 5005:9295 li dieci numeri di mezzo, che il precedente al suo conseguente immediato abbia la ragione undicesima della ragione proposta 7:13; li quali si troveranno eziandio accompagnati da frazioni decimali terze per maggior approssimazione.

E perchè il secondo termine dei proporzionali sopraddescritti ha la figura di $\sqrt[11]{7^{10}.13^{1}}$; e che facendo la sostituzione, che si è suggerita dè numeri, la figura si cangia in $\sqrt[11]{5005^{10}.9295^{1}}$: questa esigerebbe, che andando per via legittima e naturale, il numero 5005 fosse inalzato alla potenza decima, la quale poi fosse moltiplicata dall'altro numero 9295, e che per ultimo dal prodotto fosse estratta l'undecima radice, mentre dessa in punto sarebbe il termine secondo, che si vuole. Ma perchè tali operazioni ponno dirsi quasi impossibili a farsi: per un'altra via mediata invece del numero 5005 si toglie dalle tavole il suo log. 36994041, che si moltiplica per l'esponente 10; e si unisce il prodotto 369940410 al logar. 39682494 del num. 9295. poichè divisa la summa 409622904 per 11, esibisce nel quoziente $37238445\frac{9}{11}$ il logaritmo del già detto secondo termine, onde non si abbia che riscontrarlo nelle tavole, operando sino alle decimali terze, come insegna la pratica. Senonchè essendo molti li termini, che hannosi in cotal modo a rinvenire in continuazione, onde abbiansi a replicare operazioni pressochè uguali a queste, ovvero anche alquanto più lunghe: gioverà il fare una spezie di preparazione di numeri necessarj, che le renderanno più brevi per quanto sia possibile, nel seguente modo.

Si scriva in A il logaritmo del numero 5005; e si faccia doppio in B. Si uniscano insieme A B, e il logaritmo sarà triplo nella somma C. Il doppio di B lo farà quadruplo in D; quintuplo in E l'union di B C; e sestuplo F il doppio di C. Dalla union di C D nasce il settuplo G; l'ottuplo H dal doppio di D; e lo stesso D insieme con E fa il noncuplo I. Finalmente aggiungendo ad A il carattere zero si crea il suo decuplo in K. Si faccia lo stesso del logaritmo del num.° 9295 alle lettere a b c d e f g h i k.

A	36994041	I	a	39682494	i
B	73988082	II	b	79364988	ii
C	110982123	III	c	119047482	iii
D	147976164	IV	d	158729976	iv
E	184970205	V	e	198412470	v
F	221964246	VI	f	238094964	vi
G	258958287	VII	g	277777458	vii
H	295952328	VIII	h	317459952	viii
I	332946369	IX	i	357142446	ix
K	369940410	X	k	396824940	X

Logaritmi multipli del numero 5005. — Logaritmi multipli del numero 9295

Questi multipli di logaritmi si uniscano insieme a due a due per diametro e in modo inverso, come dimostra l'ordine, che segue delle pariglie di lettere, cioè Ka Ib Hc Gd Fe Ef Dg Ch Bi Ak; e ciascuna summa si divida per 11; poichè li quozienti L M N O P Q R S T V saranno i logaritmi dei termini, che si cercano; onde tolti dalle tavole i numeri assoluti, che a loro corrispondono

K	369940410	
a	39682494	
	409622904	
L	$37238445\frac{9}{11}$	--- 5294.739
I	332946369	
b	79364988	
	412311357	
M	$37482850\frac{7}{11}$	--- 5601.251

H 295952328
c 119047482
414999810
N 37727255 $\frac{5}{11}$ --- 5925.507

G 258958287
d 158729976
417688263
O 37971660 $\frac{3}{11}$ --- 6268.534

F 221964246
e 198412470
420376716
P 38216065 $\frac{1}{11}$ --- 6631.420

E 184970205
f 238094964
423065169
Q 38460469 $\frac{10}{11}$ --- 7015.312.

D 147976164
g 277777458
425753622
R 38704874 $\frac{6}{11}$ --- 7421.429

C 110982123
h 317459952
428442075
S 38949279 $\frac{6}{11}$ --- 7851.053

B 73988082
~~357142444~~
i 357142446
431130528
T 39193684 $\frac{4}{11}$ --- 8305.551

A 36994041
k 396824940
433818981
V 39438089 $\frac{2}{11}$ --- 8786.359.

x -- 5005000
l .. 5294739
m .. 5601251
n .. 5925507
o .. 6268534
p -- 6631420
q .. 7015312
r -- 7421429
s -- 7851053
t -- 8305551
u .. 8786359
z .. 9295000

con quelle decimali terze, che li rendono più vicini al vero, si avranno li dieci termini proporzionali di mezzo, che si chiedono; che anzi ridotti sotto la denominazione medesima di 1000, e trascurando il denominatore, si avranno molto più ampli, cioè in numeri espressi da sette caratteri; cosicchè posti in serie tramezzo alli due numeri 5005, 9295 accresciuti per la stessa ragione di tre zeri, come si vede in x z, tutti dodici x l m n o p q r s t u z procedano un dopo l'altro in continua ragione assai prossima alla ragione di $\sqrt[11]{7}:\sqrt[11]{13}$, come può farne sicura fede le prove materiali infrascritte.

Prova I. Comechè li numeri assoluti x l m n o &c devono esser in continua proporzion geometrica: è manifesto, che tali non sarebbono, quando i logaritmi, da cui dipendono, in continua proporzion aritmetica non fossero: dunque i logaritmi L M N O P &c dovranno avere fra di se la stessa differenza sottraendo il prossimo minore dal suo prossimo maggiore; ma realmente hanno tutti la stessa differenza 244404 $\frac{9}{11}$; e così ancora i logaritmi A a, che sono quei de' numeri 5005, 9295: dunque eziandio li numeri assoluti, che da quelli derivano, saranno continuamente proporzionali nella ragione di $\sqrt[11]{7}:\sqrt[11]{13}$.

Prova II. E perchè la quantità d'una ragione secondo ciò che ho scritto in Libro Farragine Matematica E pag. 102, è il logaritmo del suo esponente: tolta la differenza 2688453 dai logaritmi del 7, e del 13, e divisa per 11, dovrà il quoziente uguagliarsi alla differenza nominata di sopra 244404 $\frac{9}{11}$; ma così avviene di fatto, come si vede in Y: dunque cadauna delle undici, in cui è divisa la ragione de' numeri 5005000: 9295000 = 7 : 13, è uguale alla ragione di $\sqrt[11]{7}:\sqrt[11]{13}$.

11139433 logar. del num.° 13.
08450980 logar. del num.° 7.
2688453
Y 244404 $\frac{9}{11}$

Prova III. Se poi finalmente volesse alcuno far l'esperimento faticoso e lungo per via di analogie successive; dopochè li tre numeri x : l : m devono essere continuamente proporzionali: potrà per la prima analogia far x : l :: l : m; e trovandosi nel terzo termine il numero 5601251, come apparisce dalla operazione &: sarà sicuro, che li tre numeri x : l : m sono realmente in continua ragione; e replicando sino al fine simili, o equivalenti analogie, conoscerà la verità delle cose superiormente operate.

5294739
5294739
47652651
15884217
37063173
21178956
47652651
10589478
26473695
28034261078121

5005000
5601251 &
28034261078121
30092610
06261078
12560781
25507812
4828121

Continuazione del Trattenimento. Volendo prolungar la serie da l'una e l'altra parte dei termini proporzionali da principio proposti: è manifesto, che in antecedenza al primo si avrà $\sqrt[11]{7^{12}.13^{-1}}$, in conseguenza all'ultimo, $\sqrt[11]{7^{-1}.13^{12}}$; e li termini saranno quattordici. In antecedenza a quello succede $\sqrt[11]{7^{13}.13^{-2}}$, e $\sqrt[11]{7^{-2}.13^{13}}$ in conseguenza a questo; e li termini sono sedici; e così di seguito. Gli esponenti negativi non esigono che sottrazione di logaritmi; e però senza andar più avanti con maggior moltitudine di termini, basterà per instruzione trovar li numeri assoluti, che corrispondono a questi quattro; e s'intenderà, come si debba fare con

36994041 log. 5005
per 13 moltiplicato
480922533
79364988 log. 9295 per 2
401557545
36505231 $\frac{4}{11}$ --- 4472.220

36994041
12
443928492
39682494
404245998
36749636 $\frac{2}{11}$ --- 4731.117

39682494 log. 9295 per 12
12
476189928
36994041 log. 5005 per 1
439195887
39926898 $\frac{9}{11}$ --- 9833.088

39682494
13
515872422
73988082
441884340
40171303 $\frac{7}{11}$ --- 10402.324

MSS 261 B
RB NMAH

quanti altri, che si volessero appresso. Si sono poste solamente le operazioni, perchè essendo somiglianti alle antecedenti, non abbisognano d'ulterior dichiarazione; e si vedrà, che i logaritmi procedono con le stesse differenze, com'è necessario che sia.

L'accidente però, che il sestodecimo termine esca fuori dell'estensione delle tavole ordinarie, mi fa avvertire, che avendolo voluto investigare col dimezzar il suo logaritmo, e prender il numero 101.991, che alla di lui metà corrisponde; indi far di esso il quadrato 10402164.081, non mi è riuscito averlo, come lo esibiscono le tavole, che si estendono sino al 10800, le quali vogliono che sia 10402324. Ho voluto accrescere dell'unità il 101.991, e far il quadrato 10402368.064 del 101992; ma se quello era non poco mancante, questo eccede non poco; e quindi, come ho detto, mi convien avvertire, che questa pratica di dimezzare i logaritmi non è molto opportuna, perchè le differenze di quadrati, le radici dê quali differiscono dell'unità, in numeri alti, come questi che si maneggiano, sono alterate notabilmente. Si faccia dunque la pratica di scemar la caratteristica; e però tolta l'unità da essa, cioè dal 4, si cerchi nelle tavole il logaritmo $30171303\frac{7}{11}$; e il prossimo numero, che gli corrisponde, sarà $1040.232\frac{2268}{4174}$, che accresciuto del carattere 5, che gli conviene per la frazione moltiplicata per 10, esibisce per il termine ricercato il numero 10402325 maggior dell'unità di quel delle tavole. Ecco finalmente un mio terzo espediente. Dal logaritmo dato si levi il logaritmo del 2, come si vede nella operazione *; e il logaritmo, che resta, offrirà nelle tavole il numero $5201.161\frac{362}{834}$. Questo poi moltiplicato per 2 stabilisce per legittimo il numero 10402323. Qual poi di questi tre sia il migliore, lo mostrerà l'analogia eseguita al segno ÷̈, cioè 5005000 : 5294739 :: 9833088 : 10402324; nella quale trovandosi il numero dato dalle tavole, ci fa conoscere, che nel caso, in cui mancano, sono sufficienti la vecchia, e recente pratica; ma la prima non già, cioè quella di prender la metà del logaritmo per dover poi quadrar il numero.

*
$40171303\frac{7}{11}$ log. dato
03010300 log. del 2
$37161003\frac{7}{11}$ --- ~~1040.232~~ $5201.161\frac{362}{834}$
2
10402.323

÷̈
5005.000
10402324

5294739
9833088
42357912
42357912
15884217
15884217
42357912
47652651
52063634524.032
20136
11634
16245
12302
22924
2904

Ma quello ancora sarà dilettevole a vedersi, che come Corollario deriva da ciò, che si è detto, cioè che la quantità della ragione è il logaritmo del suo esponente, ovvero la differenza, che hanno fra di se i logaritmi dei termini: voglio dire, che se a cagion di esempio il logaritmo 39404667 del n.° 8719 sia diminuito, e poi accresciuto della differenza logaritmica anzidetta $244404\frac{9}{11}$: si avranno due altri logaritmi a tai numeri attinenti, che l'8719 sarà medio proporzionale fra essi non solo, ma nella ragione ancora undecesima della ragione di 7:13. Le soprascritte operazioni A B determinano li due logaritmi già nominati, con li suoi numeri corrispondenti, fra quali è medio l'8719; e le due seguenti analogie mettono sotto l'occhio la verità della proposizione. La prima 8241879 : 8719000 :: 8719000 : 9223741, che è stata eseguita in C, fa vedere, che li tre numeri sono continuamente proporzionali; e la seconda analogia eseguita in D, cioè 5005000 : 5294739 :: 8241879 : 8719000 dimostra, che la ragion dei tre numeri è la undecesima della ragione di 7:13, perchè è la stessa che la ragione de numeri X : I. Vedi pag. 6.

A
39404667
$244404\frac{9}{11}$
A $39160262\frac{2}{11}$ - 8241.879

B
39404667
$244404\frac{9}{11}$
B $39649071\frac{9}{11}$ --- 9223.742

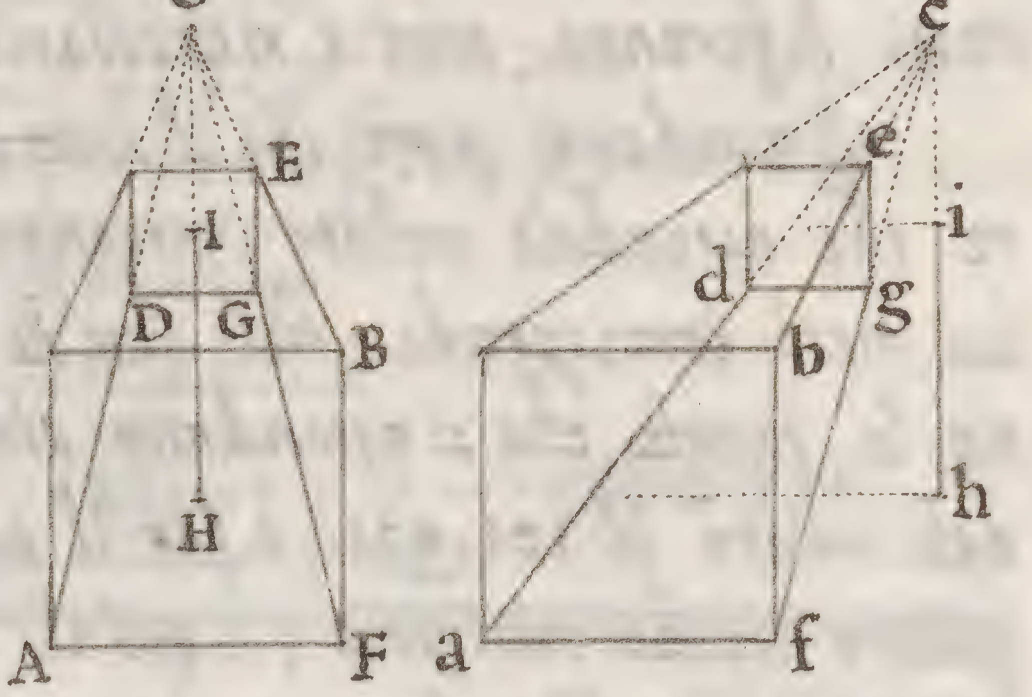
C
8719000
8719000
78471
8719
61033
69752
76020961000000
18440500
19567420
30836620
61109830
34166770
11992540
3750661

8241879
9223741 C

5294739
8241879
47652651
37063173
42357912
5294739
21178956
10589478
42357912
43638598174|581
35985
9509
45048
003174

D
5005|000
8719000 D

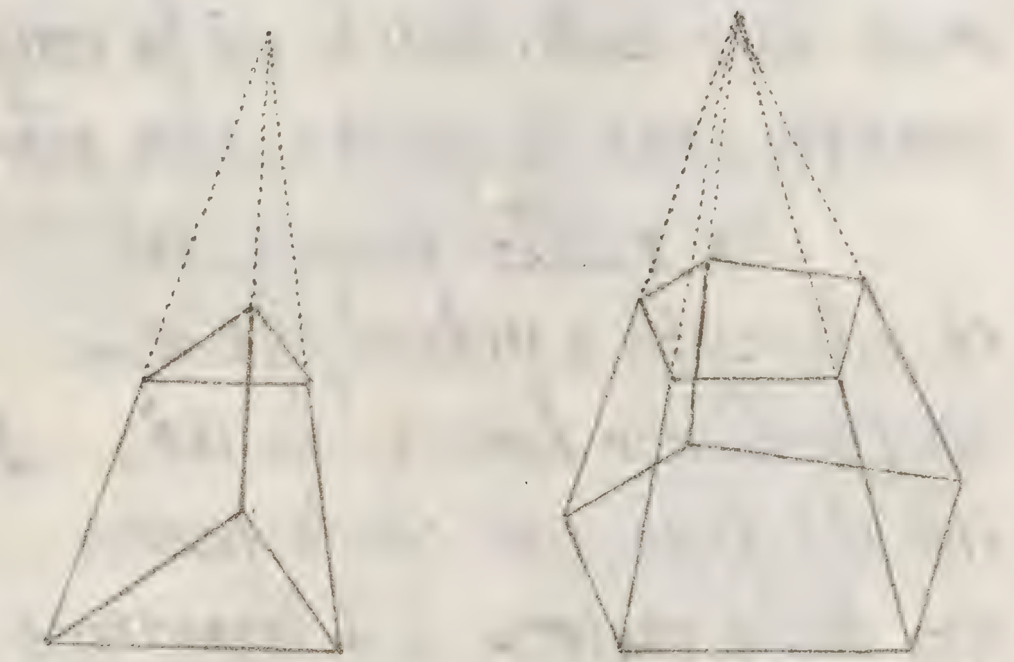
Problema. *Investigar la Regola di calcolare il tronco della Piramide segata da un piano parallelo alla sua base.*



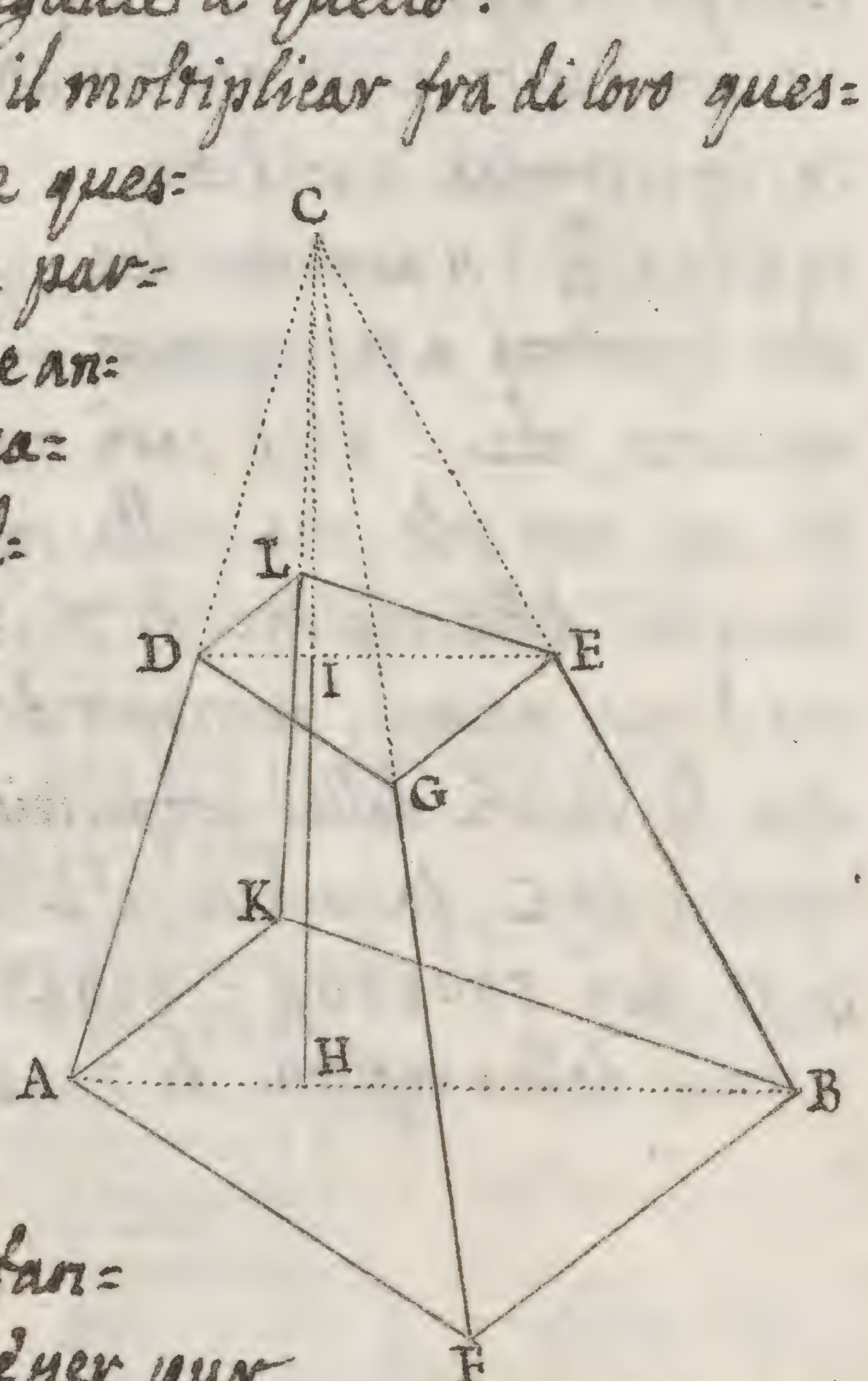
La piramide ABC abbia la base quadrata AB, e sia segata da un piano parallelo alla base AB, il quale faccia la sezione DE: è subito manifesto, che essendo la piramide un solido, che da un piano si costituisce ad un punto, come definisce Euclide nel Libro 11.º: qualunque sia la figura, che abbia il detto piano, ogni volta che la piramide sia segata da un altro piano parallelo a quello, farà sempre la sezione simile, e similmente posta al medesimo. Dunque la sezione DE è un quadrato; e però se un lato della base del tronco, cioè AF si dica m, un lato DG del piano opposto si dica n, r l'altezza HI del tronco, e l'altezza IC si dica x: si avrà la seguente analogia $m : n :: r+x : x$, onde nasca l'equazione $mx = nr + nx$, la quale poi si risolva in $x = \frac{nr}{m-n}$, e si conchiuda tutta l'altezza HC $r + \frac{nr}{m-n} = \frac{mr}{m-n}$. Con questi valori si conseguirà la solidità del tronco AE della piramide ABC;

Imperciocchè la solidità di tutta la piramide ABC sarà $\frac{m^3 r}{3(m-n)}$; quella della piramide parziale DEC sarà $\frac{n^3 r}{3(m-n)}$; e dalla prima tratta la seconda, la solidità del tronco ABDE sarà $\frac{m^3 r - n^3 r}{3(m-n)} = \frac{r}{3}\left(\frac{m^3-n^3}{m-n}\right)$. Si divida m^3-n^3 per $m-n$, e si troverà il quoziente m^2+mn+n^2; e sotto altra figura comparirà la solidità del tronco, cioè $\frac{r}{3}(m^2+mn+n^2)$. Ma è $mn = \sqrt{m^2n^2}$; e però facendo la sostituzione, si avrà per canone del calcolo proposto da investigare la espressione letterale $\frac{r}{3}(m^2+\sqrt{m^2n^2}+n^2)$.

Sembrerà forse molto stravagante la sostituzione di $\sqrt{m^2n^2}$ termine più composto, invece del più semplice mn; e pure essa è il più bel ripiego per dare la generalità alla regola. Imperciocchè è necessario avvertire, che li tre termini m^2, mn, n^2 sono fra di se in continua ragione, e che il termine medio si ottiene facilmente, quando gli estremi sieno due quadrati, nulla più importando per averlo che moltiplicar fra di se le radici di quelli; ma se non sono quadrati gli estremi, e sono invece altre figure di minor o maggior numero di lati, o anche di quattro, come parallelogrammi e trapezj, non giova moltiplicar fra di se due lati omologhi delle medesime; e però dopochè sono piani simili, e che numeri piani simili fra se moltiplicati producono sempre numero quadrato, come dimostra Euclide nel lib. 9. prop. 1.: estratta la radice dal prodotto, si ottiene il proporzionale di mezzo, necessario per questa regola, avvegnachè i piani opposti, qualunque sia la loro figura, non solamente possono esser considerati come quadrati, ma possono esser eziandio realmente convertiti in quadrati, e costituir niente meno un tronco di piramide, il quale avendo l'altezza dell'altro, sarebbe in tutto eguale a quello.



Pertanto calcolata la base, e calcolato il piano opposto, sia regola costante il moltiplicar fra di loro queste due aree, e dal prodotto cavar la radice quadrata; poichè unendo insieme questa radice con le due aree, e moltiplicando la somma per l'altezza: la terza parte del prodotto stabilisce infallibilmente la solidità del tronco piramidale; che anzi se dal prodotto delle aree, essendo razionali, non uscisse perfetta la radice quadrata, si avrebbe indizio sicuro, che il tronco non sarebbe di piramide, ma di altro solido, che da un piano invece di costituirsi ad un punto, si costituirebbe ad una linea, ovvero ad una superficie &, e la sua solidità non sarebbe soggetta a canone alcuno.



Esempio. *Il tronco di piramide ABDE abbia per base il trapezio AFBK, del quale sia il lato AF = 26, FB = 22, BK = 30, AK = 14: è manifesto, che per calcolarlo è necessario, che sia nota una sua diagonale. Sia questa AB = 40; e dalla cognizion dei lati fatto il calcolo delli due triangoli AFB AKB, si troverà AFB = 264, AKB = 168, che uniti insieme fanno il trapezio AFBK = 432. Il piano opposto, per ciò che si è detto, dovrà esser pur esso un trapezio, e sia DGEL, che abbia il lato DG = 13; e che perciò, incontrandosi esser la metà del lato AF, sarà necessariamente GE = 11, perchè omologo a FB; e per la stessa ragione sarà EL = 15, DL = 7;*

e oltre a ciò tirata la diagonale DE omologa alla AB, sarà la DE = 20, onde calcolati li due triangoli DGE DLE nel modo, che si è detto, sia DGE = 66, DLE = 42, che uniti formano il trapezio DGEL = 108. Si faccia il prodotto 432·108 = 46656; e da esso cavata la radice 216, la quale è precisa, come si è avvertito dover essere, e come può vedersi dalle operazioni M: si raccolgano insieme le due aree con la radice; e sarà la summa 432+216+108 = 756. Sia poi del tronco l'altezza HI = 17, per cui moltiplicando la detta summa, si avrà il prodotto 17.756 = 12852, la di cui terza parte N = 4284 è la solidità del tronco piramidale.

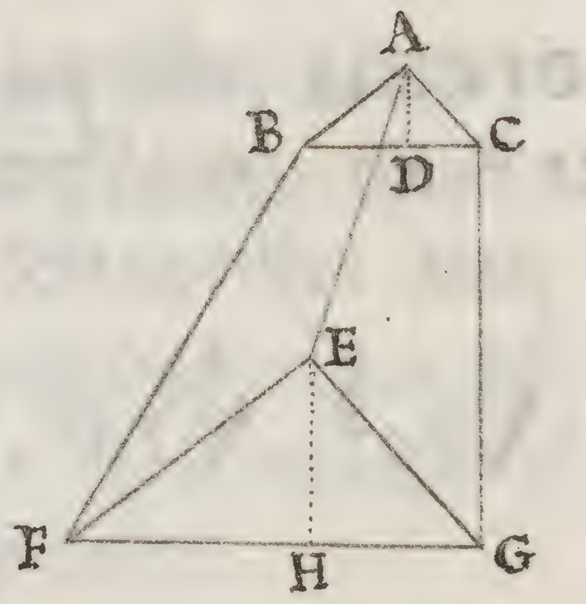
Prova. Comechè si è veduto, che il lato DG del piano opposto è la metà del suo omologo AF della base: è manifesto, che l'altezza HI è la metà di tutta l'altezza HC della piramide, se fosse compiuta; e però essendo HI = 17, sarà HC = 34, e la rimanente IC = 17: dunque la base AFBK = 432 moltiplicata per l'altezza HC = 34, e diviso per 3 il prodotto, darà il quoziente O solidità della piramide intera ABC. Di nuovo il piano DGEL = 108 sia moltiplicato dall'altezza IC = 17; e diviso pure dal 3 il prodotto, darà la solidità P della piramide parziale DEC, la quale sottratta dall'intera ABC, lascierà in Q il tronco ABDE, che riscontrandosi essere lo stesso poco fa ritrovato, ci assicura della validità della Regola investigata, e scoperta; il che era ciò, che doveasi fare.

756		M	432
17		2	108
5292		41	3456
756		426	432
12852			46656
N 4284			66
			2556
			000

108	432
17	34
756	1728
108	1296
1836	14688
P 612	O 4896
	612
	Q 4284

Senonchè la somiglianza necessaria, che ha d'aver il piano opposto con la base (o quella con questo reciprocamente; il che è lo stesso) affinchè il tronco sia di piramide, e non d'altro solido, somministra non meno al di lui calcolo, che alla maniera di misurarlo una facilità particolare, e differente dalla comune;

Imperciocchè pongasi, che il tronco AFG abbia il piano opposto ABC triangolare; e che misurato il lato BC sia 54, e la perpendicolare AD, che vi cade sopra dal vertice A, sia 24, per cui l'area calcolata risulti in 648: per aver l'area della base EFG sarà sufficiente, e nulla più, il misurar il lato solo FG omologo al lato noto BC; e si ponga FG essere 126; poichè fatta l'analogia BC : FG :: ABC : x, cioè 54 : 126 :: 648 : 1512; e di nuovo la seconda BC : FG, cioè 54 : 126 :: 1512 : 3528, e manifesto, che con la prima si ottiene il medio proporzionale fra il piano ABC, e la base EFG senza la moltiplicazion di essi piani opposti e l'estrazion di radice; e con la seconda si conseguisce l'area della base con la sola misura d'un lato, se anche invece d'un triangolo essa fosse un poligono di molti lati. Sia poi l'altezza del tronco 119; e fatta la somma dei tre piani 648 + 1512 + 3528 = 5688, si moltiplichi per il 119; poichè diviso per 3 il prodotto 676872, comparirà nel quoziente 225624 la solidità del tronco AFG con maggior brevità e facilità di computo, come ho detto. Imperocchè



	54	648	5688
	1512	126	119
	126	3888	51192
	9072	7776	62568
	18144	81648	676872
54	190512	276	225624
3528	285	64	
	151	108	
	432	00	
	00		

Operando secondo la comune regola, bisogna conseguir prima il valor della perpendicolare EH del triangolo della base EFC, essendo noto il suo lato FG, su di cui cade, omologo al lato BC del triangolo ABC di cima, su cui cade la perpendicolare AD, onde quella sia omologa a questa; e ciò si ottiene con l'analogia BC : AD :: FG : EH, cioè 54 : 24 :: 126 : 56, come si vede eseguito in I. Si moltiplicano poi li due primi termini fra di se; indi li secondi, come si è fatto in K L; e nelle metà dei prodotti si hanno le aree dei triangoli, cioè 648, 3528. Queste in terzo luogo fra di se moltiplicate, come in M, e cavata dal loro prodotto la quadrata radice N, ci offre il medio proporzionale 1512 per far in ultimo le restanti operazioni che restano sino a conseguir la solidità richiesta; ma tutti li numeri ora trovati sono li medesimi, che sono usciti di sopra con brevità, e facilità maggiore al confronto; dunque; il che è ciò, che si dovea vedere per prova di quanto ho detto. Segue il cono tronco.

	126	K 54	L 126	3528
	24	24	56	648
	504	216	756	28224
	252	108	630	14112
54 I	3024	1296	7056	21168
56	324	648	3528	M 2286144
	00			128
			1	361
			25	6044
			301	0000
			3022 N	

Per il tronco d'un cono, quale appunto si rappresenta dalla capacità d'un Tino, questa seconda maniera di calcolo è opportuna e comoda mirabilmente, giacchè le sue misure necessarie oltre l'altezza non sono che li due diametri interni, cioè uno della bocca, e l'altro del fondo.

Il diametro della bocca per cagion d'esempio sia piedi 3:3 = oncie 39; quello del fondo piedi 4:8 = oncie 56; e l'altezza sia piedi 5:2 = oncie 62. Sia poi 7:22 la ragione da impiegarsi.

```
  39       56             1521            1521
  39       56               56            2184        14
 ----     ----            -----           3136     --------------
  351      336             9126          ------     F 333254 3/7
 117      280             7605           D 6841     G 111084 17/21
 -----    -----           ------             62
A 1521    3136 B          85176          ------
            39              71             13682
          ------           327            41046
          C 2184           156            ------
                            00           E 424142

  424142           864 : 72 : 18           2443
  424142        K Botti 2 : 9 : 3 : 13      715
 --------                                    67
 4665562                                     13
   46
    45           H 1728 : 38 :: 111084 17/21
     35                              38
      76                          --------
       62                          888672
        6                          333252
  1728           4221223             12:14
 ------           7652               12:14
 H 2442            7402               5: 9
                   4903            -----------
                   1447            4221222 16/21
```

si facciano li due quadrati A B dei diametri, e poi l'analogia 39 : 56 :: 1521 : 2184, con cui si trova il medio proporzionale C fra li due quadrati A B. Si sommino A B C, e facciano la somma D, la quale si moltiplichi per l'altezza 62, e produca E. Mediante un'altra analogia 14 : 11 :: 424142 : 333254 $\frac{3}{7}$ si riduca al cerchio, quanto si è fatto sin qui sotto figura quadrata; e il quarto termine F si divida per 3; poichè nel quoziente G si avranno atomi solidi 111084 $\frac{17}{21}$ per la capacità del Tino, la quale ragguagliata a ragione, come si dice, d'inguistare 38 per ogni piede cubico, ovvero atomi 1728, comprenderà inguistare 2443 poco meno, come si può conoscere dall'ultima analogia H. E dopochè 864 inguistare costituiscono una botte, 72 un brento, 18 una secchia: il Tino sarà di tenuta Botti 2, Brenti 9, Secchie 3, e Inguistare 13, come apparisce dalle operazioni K.

Teorema, *che può servire di continuazione al trattenimento sopra i Logaritmi alla* *pag.* 1.

Sono tutte uguali fra loro le sedici espressioni radicali numeriche; cioè sotto diverse forme sono una espressione medesima

$$\sqrt[\frac{4}{7}]{79^{\frac{3}{5}}},\ \sqrt[\frac{4}{3}]{79^{\frac{7}{5}}},\ \sqrt[\frac{5}{7}]{79^{\frac{3}{4}}},\ \sqrt[\frac{5}{3}]{79^{\frac{7}{4}}},\ \sqrt[\frac{1}{3}]{79^{\frac{7}{20}}},\ \sqrt[\frac{1}{7}]{79^{\frac{3}{20}}},\ \sqrt[\frac{5}{21}]{79^{\frac{1}{4}}},\ \sqrt[\frac{4}{21}]{79^{\frac{1}{5}}},\ \sqrt[4]{79^{\frac{21}{5}}},\ \sqrt[5]{79^{\frac{21}{4}}},\ \sqrt[\frac{20}{7}]{79^{3}},\ \sqrt[\frac{20}{3}]{79^{7}},\ \sqrt[20]{79^{21}},$$

$$\sqrt[\frac{1}{21}]{79^{\frac{1}{20}}},\ \sqrt[\frac{20}{21}]{79^{1}},\ \sqrt[1]{79^{\frac{21}{20}}}.$$

È dottrina certa, fondata su la natura loro, che sono tre le esigenze de' logaritmi applicati agli esponenti delle quantità. La prima che se una quantità essa sola è affetta di esponente: questo deve moltiplicar il logaritmo di quella; la seconda che se una quantità affetta di segno radicale ha esso solo il segno radicale affetto di esponente, questo deve divider il logaritmo di quella; finalmente che essendo tanto la quantità, come il segno radicale affetti ambedue di esponente; comechè ognuno degli esponenti deve fare la sua funzione: così la terza esigenza vuole per lo meno, che l'esponente del segno radicale divida l'esponente della quantità, e che dal quoziente sia moltiplicato il logaritmo di questa.

Ciò posto l'ultima delle sedici espressioni radicali, cioè $\sqrt[1]{79^{\frac{21}{20}}}$ è la più semplice di tutte le altre; poichè il segno radicale avendo per esponente l'unità, lascia inalterata la quantità 79, cui regge; e perciò da tutti gli Algebristi si scrive senza segno, cioè $79^{\frac{21}{20}}$, e da loro poi si chiama potenza imperfetta; ma tutte le altre espressioni, che precedono, operando secondo alcuna delle esigenze descritte, si riducono alla potenza imperfetta $79^{\frac{21}{20}}$: dunque saranno tutte uguali fra loro.

Imperciochè per la prima espressione $\sqrt[\frac{4}{7}]{79^{\frac{3}{5}}}$, quando l'esponente del segno divida l'esponente della quantità, operando secondo la regola di divider le frazioni: si trova $\sqrt[1]{79^{\frac{21}{20}}} = 79^{\frac{21}{20}}$; e per le altre espressioni si vede apertamente, che nulla può accader in contrario: dunque sono tutte uguali fra loro le sedici espressioni radicali proposte; ovvero sotto diverse forme sono un'espressione medesima; il che si doveva &c.

```
A  18976271
         21
 -----------
B  398501691
C  19925084 11/20
```

Pratica. *Volendo investigare per approssimazione, qual sia il numero comune, che si nasconde sotto le date espressioni; si ricerchi nella prima e nell'ultima nominate di sopra; poichè uscendo il medesimo, servirà nel tempo stesso di prova. L'ultima espressione come potenza imperfetta nulla di più esige, che preso il logaritmo A del numero 79, si moltiplichi per la frazio=*

ne esponenziale $\frac{21}{20}$, cioè moltiplicandolo per 21, e dividendo il prodotto B per 20; mentre nel quoziente C verrà il logaritmo del numero, che si cerca, il quale riscontrato nelle tavole sino alle terze decimali, manifestasi essere 98.291‴. La prima poi esige, che lo stesso logar. A sia moltiplicato dalla frazione $\frac{3}{5}$ esponente del numero 79, cioè che sia moltiplicato per 3 numeratore e diviso il prodotto D per 5 denominatore, onde si abbia nel quoziente E un altro logaritmo; che il quoziente E sia diviso dalla frazione $\frac{4}{7}$ esponente del segno radicale, cioè che sia moltiplicato per il denominator 7, e diviso il prodotto F per il numerator 4; cosicchè veggendosi, che in quest' ultimo quoziente G comparisce il logaritmo medesimo C ritrovato antecedentemente, sia manifesto, che la prima espressione è la stessa che l'ultima. Nè più nè meno accaderà di tutte le altre, quando si volesse farne l'esperimento; il che non credo, che alcuno vorrà tentare per non mostrarsi incapace di aver conosciuta la oculare dimostrazione da principio; che anzi a fine di renderle più sensibili, le sottopongo all'occhio trasformate sotto forme simboliche, sostituendo lettere invece di numeri, come apparisce in H, per cui si hanno le infrascritte espressioni radicali algebraiche tutte uguali all'ultima, e conseguentemente anche fra di se, quando però non cadesse qualche dubbio sul primo assioma geometrico.

A	18976271
	3
D	56928813
E	$11385762\frac{3}{5}$
	7
F	$79700338\frac{1}{5}$
G	$19925084\frac{11}{20}$

$$\left(\begin{array}{l} 7 = a \\ 4 = c \\ 5 = m \\ 3 = n \end{array}\right)$$

H

$$\sqrt[\frac{c}{a}]{q^{\frac{n}{m}}} \quad \sqrt[\frac{c}{n}]{q^{\frac{a}{m}}} \quad \sqrt[\frac{m}{a}]{q^{\frac{n}{c}}} \quad \sqrt[\frac{m}{n}]{q^{\frac{a}{c}}} \quad \sqrt[\frac{1}{n}]{q^{\frac{a}{cm}}} \quad \sqrt[\frac{1}{a}]{q^{\frac{n}{cm}}} \quad \sqrt[\frac{m}{an}]{q^{\frac{1}{c}}} \quad \sqrt[\frac{c}{an}]{q^{\frac{1}{m}}} \quad \sqrt[c]{q^{\frac{an}{m}}}$$

$$\sqrt[m]{q^{\frac{an}{c}}} \quad \sqrt[\frac{cm}{a}]{q^{n}} \quad \sqrt[\frac{cm}{n}]{q^{a}} \quad \sqrt[cm]{q^{an}} \quad \sqrt[\frac{1}{an}]{q^{\frac{1}{cm}}} \quad \sqrt[\frac{cm}{an}]{q^{1}} \quad \sqrt[1]{q^{\frac{an}{cm}}}$$

Lemma I. Li numeri in serie aritmetica moltiplicando un qualche numero, fanno i prodotti in serie aritmetica. = 3.7.11.15.19 &c. moltiplicando il 2 fanno li prodotti 6.14.22.30.38, cioè 6. 6+8. 6+8+8. 6+8+8+8. 6+8+8+8+8. &c.

Lemma II. Li numeri in serie aritmetica dividendo un qualche numero, non fanno i quozienti in serie aritmetica. = 1.2.3.4.5. &c. dividendo il 60, fanno li quozienti 60.30.20.15.12, cioè 60. 60−30. 60−30−10. 60−30−10−5. 60−30−10−5−3. &c.

Lemma III. Ma le frazioni, che hanno lo stesso numeratore, e li denominatori in serie aritmetica dividendo un qualche numero, fanno i quozienti in serie aritmetica. = $\frac{3}{5}.\frac{3}{7}.\frac{3}{9}.\frac{3}{11}.\frac{3}{13}$ dividendo il 4, fanno li quozienti $\frac{20}{3}.\frac{28}{3}.\frac{36}{3}.\frac{44}{3}.\frac{52}{3}$, cioè $\frac{20}{3}.\frac{20+8}{3}.\frac{20+8+8}{3}.\frac{20+8+8+8}{3}.\frac{20+8+8+8+8}{3}$.

Teorema I. Le potenze della medesima quantità, li di cui esponenti sono in serie aritmetica: sono in serie geometrica. [illegible]

Teorema II. Le radici della quantità medesima, li di cui esponenti sono in serie aritmetica: non sono in serie geometrica.

Teorema III. Ma sono in serie geometrica le radici della quantità medesima, li di cui esponenti sono frazioni, che hanno lo stesso numeratore, e li denominatori in serie aritmetica.

Scolio. Questi tre Teoremi come analoghi all'antecedente sono scritti senza dimostrazioni formali a solo fine che essendo ora occupato in altro, non mi sfuggano dalla mente, come potrebbe facilmente avvenire; per altro dipendono dai tre Lemmi anteriori. E quanto al primo egli è già noto comunemente; ma il secondo e terzo si rendono manifesti col ridurre a potenze imperfette le radici.

Imperciocchè se per il secondo siano date le radici $\sqrt[1]{a}$, $\sqrt[2]{a}$, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[4]{a}$, che abbiano gli esponenti 1.2.3.4 in serie aritmetica; e siano ridotte a potenze imperfette: diverranno $a^{\frac{1}{1}}$, $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{1}{4}}$, gli esponenti delle quali sono quozienti d'un numero medesimo diviso da numeri in serie aritmetica; ma tali quozienti non sono in serie aritmetica per il lemma 2: dunque per il Teorema 1 le potenze $a^{\frac{1}{1}}$, $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{1}{4}}$ non sono in serie geometrica; e perciò nè meno sono in serie geometrica le radici $\sqrt[1]{a}$, $\sqrt[2]{a}$, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[4]{a}$ uguali a quelle.

Per il terzo poi sieno date le radici $\sqrt[\frac{2}{3}]{a}$, $\sqrt[\frac{2}{5}]{a}$, $\sqrt[\frac{2}{7}]{a}$, $\sqrt[\frac{2}{9}]{a}$, che riducendole a potenze imperfette diverranno $a^{\frac{3}{2}}$, $a^{\frac{5}{2}}$, $a^{\frac{7}{2}}$, $a^{\frac{9}{2}}$, gli esponenti delle quali, com'è manifesto, sono in serie aritmetica; e quindi le potenze sono in serie geometrica per il Teorema 1: dunque ancora le radici $\sqrt[\frac{2}{3}]{a}$, $\sqrt[\frac{2}{5}]{a}$, $\sqrt[\frac{2}{7}]{a}$, $\sqrt[\frac{2}{9}]{a}$ uguali a quelle, sono in serie geometrica.

Problema di Agrimensura per Logaritmi.

Prima per logaritmi, e poi col metodo comune ritrovare sino alla denominazion degli atomi il lato del quadrato, a cui deve ridursi un terreno di figura un rettangolo lungo pertiche 123, piedi 5; largo pertiche 113, piedi 1.

Si convertano in piedi con le moltiplicazioni I ambedue le dimensioni date; e la prima sarà piedi 743, il di cui logaritmo A; la seconda piedi 679, che ha per logaritmo B; e li due logaritmi si uniscano insieme, che facciano la summa C. A questa dimezzata in D si aggiunga il logaritmo E del numero 12 denominator delle oncie; poichè la summa F sarà il logaritmo del lato espresso in oncie del quadrato, che si ricerca. Si riscontri questo logaritmo nelle tavole, e si vedrà, che giace tramezzo ai due logaritmi G, H, a quali corrispondono li due numeri assoluti 8524, 8523; cosicchè il richiesto numero sia minor del primo, e maggior del secondo; ma siccome li due numeri assoluti differiscono fra se della sola unità, il numero medio sarà ugual al secondo 8523 con di più una frazione; per aver la quale si prenda la differenza 509 tra li due logaritmi minimo, e massimo H G, che sarà il primo termine d'una proporzione; e tra li due minimo, e medio H F la differenza 180 termine secondo. Il terzo poi sia il numero 12 denominator dei punti; e fatta la operazione K procedendo sino agli atomi, si avranno per dimension del lato del quadrato oncie 8523, punti 4, atomi più che 2, cioè 3 più prossimi; e le oncie ridotte in pertiche e piedi si avranno Pert.^a 118, piedi 2, onc. 3. punti 4, atom. 3; il che è ciò che doveasi ritrovare col mezzo dè logaritmi.

I
123:5
6
743
113:1
6
679

A 28709888. log. di.. 743.
B 28318698. log. di.. 679.
C 57028586.
D 28514293.
E 10791812. log. di ---12.
F 39306105. log. di.. 8523: 4/12 : 3/12.

G 39306434. log. di. 8524.
H 39305925. log. di 8523.

K
509 | 180
4:2 | 12
 | 2160
 | 124
 | 12
 | 1488
 | 470

La operazione per numeri si fa traducendo le due dimensioni in oncie, come si è fatto in L; e fra di se moltiplicati li prodotti, facciano il terzo prodotto M, da cui estratta la radice quadrata N, si ravvisa perfettamente la stessa in oncie 8523. Per accompagnarla con le sue frazioni di punti, e di atomi, essa radice si raddoppj, e si accresca dell'unità, come in O; e il residuo P si moltiplichi per 12, e si divida per O il prodotto Q; poichè si avranno in R li punti 4 come prima. Si continui a moltiplicar per 12, e divider per O, e compariranno in seguito gli atomi più che 2, cioè 3 manifestamente più prossimi. Che mai dunque si può desiderar di vantaggio dall'Algorismo dè Logaritmi, perchè si abbia a prestar loro tutta la fede? Invenzione veramente mirabile, e di un comodo tanto grande in alcune circostanze di calcoli, che non potrà mai abbastanza commendarsi.

O 17047
Punt. 4: 2
R

P 6039
12
Q 72468
4280
12
51360
17266

743
12
8916

L
679
12
8148
8916
48888
8148
73332
65184
M 72647568
864
3975
57168
P 6039

N
8
165
1702
17043

Pert.^a 123:5
Pert.^a 113:1
369
1353
20:3
56:3:6
34:4:4
S Tav.^e 14013:4:10
6
Piedi ----- 29:–

Onc.^e 8523:4:3
Onc.^e 8523:4:3
25569
17046
42615
68184
2841
177:6:9
2841:1:5
177:6:10:–:9
T Punt. 72647566:3:–:–:9
6053963:10
504496:11
144
049
136
X Piedi -- 28

36
Tav.^e 14013

Pert.^e 118:2:3:4:3
Pert.^e 118:2:3:4:3
944
1298
39:2
4:5:6
–:3:3:4
–:–:2:5:6
39:2:9:1:5
4:5:7:1:8:1:6
–:3:3:5:6:2:10
–:–:2:5:7:1:8:1:6
V Tav.^e 14013:4:9:11:8:8:0:1:6
6
Pied. ------ 28:11:10:3:0:0:9:–

La moltiplicazione S delle due date dimensioni dimostra nel suo prodotto in Tavole la quantità del terreno da ridursi in quadrato. Il prodotto T del lato espresso in oncie, moltiplicato in se medesimo, manifesta la quantità in punti, a cui sarà ridotto il terreno, allorchè sarà convertito in quadrato; e la stessa quantità conferma in Tavole il prodotto V di esso lato in se, espresso in pertiche, la quale si accorda a puntino con la riduzione X in Tavole dei punti del prodotto T. Ma è osservabile come in questi prodotti il primo sia maggior degli altri, quando para che dovrebbe esser minore, avvegnachè tanto per logaritmi, quanto col metodo comune si è preso qualche cosa di più nell'ultima frazione degli atomi, stante li residui maggiori anche di molto del-

la metà dei loro divisori; nientedimeno ciò non ha da produr dubbietà nelle operazioni, poichè è già noto, che un poco di più nei logaritmi non fa in certi casi eccedenza in ciò, che si cerca; e nel metodo comune di cavar la radice quadrata, dopochè nel caso presente si sono trovati li punti e gli atomi con la divisione del residuo per il doppio della radice ritrovata accresciuto dell'unità: un tal divisor deve sempre esibire minor del vero la radice. Si vegga un simile problema similmente risolto in Libro Farragine Matematica D *alla pagina 31.*

Problema, in cui si compongono tre proporzioni.

Errore comune, che l'Auna di Parigi, vale a dire l'Ulna, cioè il Braccio, con cui si misura in quella Città qualunque sorta di drappo, si uguagli a 3 piedi del Re, oncie 7, e linee 8. (Avverti, che l'oncia si forma da linee dieci). Il piede poi di Verona al piè del Re, o sia di Parigi ha la ragion de' numeri 21 : 20; e il braccio da lana in Verona al piè di Verona ha la ragion de' numeri 55 : 29. Da queste cognizioni si dimanda, come si ritragga la ragione, che l'Ulna di Parigi ha col detto Braccio di Verona.

Questa ragione si ritrae col far la summa delle tre ragioni surnominate; ma per ciò fare convien sapere, che per legarle giustamente senza errore, si devono ordinare, incominciando dall'ulna con paragonarla al piè di Parigi; passando a paragonare il piè di Parigi col piè di Verona; e terminando col paragone del piè Veronese col braccio Veronese; cosicchè sommando insieme queste tre ragioni in tal maniera ordinate, il paragone del primo termine con l'ultimo sarà la ragione richiesta dell'Ulna col Braccio.

Convertendo adunque l'ulna, e il piè di Parigi nell'ultima frazione di linee, si troverà, che quella a questo ha la ragione de' numeri 438 : 120, i quali sono divisibili per 6, e si riducono ai numeri primi A. *La ragione del piè di Parigi al piè di Verona è già per se in termini minimi* B; *e così ancora la terza* C, *cioè del piede al braccio Veronesi. Ma osservandosi, che tanto fra i termini antecedenti di queste ragioni, che fra li conseguenti si trova il numero 20, questo come inutile si esclude da l'una e l'altra parte, in luogo del quale si può supporre, che sottentri l'unità, come in* E; *ovvero anche meglio si possono considerare le due sole ragioni* F, *la prima delle quali è quella che ha l'ulna al piè di Verona, e l'altra quella del piede al braccio Veronesi; e però moltiplicando li due antecedenti 73·29 = 2117, si avrà l'antecedente composto; e moltiplicando li due conseguenti 21·55 = 1155, si avrà il composto conseguente, onde si concluda eziandio in termini minimi, che l'Ulna di Parigi al Braccio di Verona abbia la ragion de' numeri 2117 : 1155; il che è ciò, che si dovea fare.* Ragione falsa, perchè l'oncia si forma da linee dodici.

A	73	:	20	
B	20	:	21	
C	29	:	55	
E	73	:	1	
	1	:	21	
	29	:	55	
F	73	:	21	
	29	:	55	
D	2117	:	1155	

Correzione. *Ridotta l'ulna, e il piè di Parigi a linee, emerge la ragion loro nei numeri 524 : 144 divisibili dal 4, per cui divengono 131 : 36. Ma perchè di nuovo il 36 conseguente di questa ragione è divisibile dal 4, ~~quando anche l'ante~~ e il conseguente 55 della ragion* C *è divisibile dal 5, quando anche l'antecedente 20 della ragion* B *è divisibile esso solo da ambedue questi divisori 4, e 5: fatte le divisioni da l'una e l'altra parte, le ragioni da summarsi saranno le* G H I; *delle quali moltiplicati gli antecedenti fra di se, e fra se ancora li conseguenti: nei due prodotti* K *si avrà la ragione legittima dell'Ulna di Parigi al Braccio da lana di Verona; cioè nei due numeri fra di se primi 3799 : 2079.*

G	131	:	9
H	1	:	21
I	29	:	11
K	3799	:	2079

Pratiche. *Moltiplicazione di libbre, e oncie per lire, soldi, e danari in tre maniere. La prima A è fatta col metodo di prender le parti; la seconda B con aver ridotte alle ultime loro frazioni le quantità, che devono moltiplicarsi; e la terza C è fatta per logaritmi, nella quale facendo uso di scemar la caratteristica, e di togliere le differenze per decimali, si riscontra il numero D uguale al numero E, cioè al prodotto della seconda moltiplicazione B, e lascia la frazione residuaria F; e facendo uso di levare il doppio G del logaritmo 12, cioè il logaritmo del 144, offre precisamente le due ultime frazioni della moltiplicazione, ma lascia una residuaria frazione H minore della F, e ciò in riguardo delle differenze maneggiate sotto la denominazione delle duodecimali; il che mostra questa operazione più vicina di quella, abbenchè di poco.*

A
℔ 17:7
£ 19:11:1
153
17
8:10
-:17
-: 1:5
9:15: 6: 6
1:12: 7: 1
£ 343:16:6:7

℔ 17:7
12
211

£ 19:11:1
20
391
12
4693

B
4693
211
4693
4693
9386
E 990223
82518: 7
6876: 6
343:16

36714506 log. di 4693
23242825 log. di 211
59957331 log. di 990223 D
39957331 log. di 9902
39957229
439
23
10200
1420
103
103
F 439

59957331
G 21583625 log. di 144
38373706 log. di 6876:6:7
38373359 log. di 6876
632
6:7
347
12
4164
372
12
4464
40
H 40/632

Problema di Agrimensura, che si risolve più brevemente con l'Aritmetica dodicadica.

In una Città si costuma una misura per li terreni, che si chiama funicolo, cioè una lunghezza, che alla pertica di Verona ha la ragion de' numeri 71 : 18; e la di cui divisione si fa solo in parti duodecimali, cioè prime, seconde &c. Con questi funicoli essendo stato misurato un terreno rettangolo, lungo funicoli 17, 11 prime, e 7 seconde; largo funicoli 13, 10 prime, e 5 seconde: si vorrebbe sapere, quanti campi Veronesi comprenda; e si ricerca una regola di tradurre qualunque superficie di quel paese alla denominazion di campi, vanezze, tavole & misura di Verona, senza aver bisogno di tradurre quelle dimensioni a queste, mentre il calcolo riuscirebbe troppo lungo, e faticoso.

Facendo la moltiplicazione delle due dimensioni, come sono enunziate, si trova il prodotto A, li di cui intieri esprimono funicoli quadrati, accompagnati da frazioni duodecime sino alle quarte. È già noto, che li quadrati hanno fra di se la ragion duplicata de' lati; e perciò il funicolo quadrato alla pertica quadrata, o sia tavola avrà la ragione di $71^2 : 18^2 = 5041 : 324$; *ma perchè il campo di Verona si compone da tavole 720: la ragione del funicolo quadrato al campo Veronese sarà quella de' numeri* $5041 : 324 \cdot 720 = 5041 : 233280$, *che per esser primi non può conseguirsi espressa da numeri minori. Perchè poi le moltitudini delle cose sono in ragione inversa delle grandezze delle cose medesime, e che qui si chiede la moltitudine de' campi Veronesi: si farà l'analogia, il di cui primo termine sarà il 233280, il secondo 5041, e il terzo il prodotto A; intorno a cui fatta la moltiplicazione B degli intieri, si proseguirà per li rotti col prender le parti, accordando al primo avanzo la denominazione 24 per le vanezze; al secondo la denominazion 30 per le tavole; indi quella del 36 per li piedi; e il 12 per tutte le altre, che continueranno, onde aver le oncie, i punti, gli atomi, li minuti &. Si esamini la operazione C, che mostra questa pratica; e si troverà il prodotto D opportunamente disposto al bisogno per soddisfare ad ambedue le dimande del Problema.*

Imperciochè dividendo il prodotto D per il primo termine E della ragione, e moltiplicando poi l'avanzo per 24; e di nuovo dividendo, e moltiplicando in seguito per 30 il residuo; indi dopo la divisione moltiplicando per 36 ciò, che resta,

Funicoli 17:11:7
Funicoli 13:10:5
221
11:11
-: 7:7
14: 2
-: 9: 2
-: -: 5:10
-: 7: 1
-: -: 4: 7
-: -: -: 2:11
A
Funicoli quadr.ti 249: 1: 8: 7:11

E 233280
F Campi 5: 9: 6: 12: -: 3: 8: 10: 6: 8

5041
249: 1: 8: 7:11
B
45369
20164
10082
C
420: 2
210: 1
70: -:10
17:12: 2:18
2:22: -:15
1:11: -: 7: 6
-:17:15: 3: 9
-:11:20: 2: 6
D 1255932: 5:18:10: 9
89532
24
358133
179064
2148773
49253
30
1477608
77928
36
467578
233784
2805418
472618
6058
12
72705
12
872460
172620
12
2071440
205200
12
2462400
129600

71
71
71
497
5041

O
18
18
324
720
6480
2268
233280

129600
12
1555200
155520
12
1866240
00000

e fatta la quarta ~~moltiplic~~ divisione, moltiplicando per 12, e continuando simili operazioni col moltiplicar per 12, sino che avanzi il zero, come dee necessariamente accadere: in fine si troverà il quoziente F, che in complesso con tutte le sue frazioni manifesterà nelle precise denominazioni della pratica Veronese la giusta quantità del terreno misurato con li funicoli, e senza che siensi ridotte le dimensioni forestiere alle misure di Verona. Il terreno adunque è campi 5, vanezze 9, tavole 6, piedi 12, oncie 0, punti 3, atomi 8, minuti 10, dodicesime 6 di minuto, e 8 seconde.

Senonchè è osservabile, come questo calcolo si possa rendere assai breve, dopochè il funicolo, essendo diviso in sole frazioni duodecimali l'una all'altra consecutive, ammette con l'ultima facilità il maneggio dell'Aritmetica dodicadica; per cui eziandìo le frazioni di denominazion Veronese si trattano senza molta intensione di mente. Imperciocchè

```
   5u          16            15u7
   5u          16            11€5
  ----        ----          ------
  551          90            759u
 257    H      16           12u7€
  ----        ----         17567
 2u01          230        --------
               500      G  189187u
             ------           2u01
           I u3000        ---------
                            189187u
                           17046u31
                           356353€
                          ----------
                          506990297u
                        L  43990297u
                                  20
                          ----------
                          877605736€0
                        M  246057360
                                  26
                          -----------
                           1230297u00
                           4900u278
                          -----------
                           5u31203700
                        N   391203700
                                   30
                          -----------
                           u3360€9000
                             360€900000
                              83€9000000
                               9€90000000
                                630000000000
                                7600000000000
                                 00000000

         u30000000
K Campi 5:9:6:10:0:3:8:€:6:8
```

La prima dimensione del terreno si riduce alla figura di 15u7, e la seconda diventa 11€5, dalle quali, fatta la moltiplicazione, comparisce il prodotto G, in cui le ultime quattro note esprimono a puntino le quattro duodecimali del prodotto A. Li numeri, che costituiscono la ragion 71:18 del funicolo alla pertica, in dodecadica divengono 5u:16, li quadrati de' quali per conseguir la ragion delle superficie sono 3u01:230, come si può vedere in H. Dovendo poi il secondo termine esser moltiplicato, come si è detto, dal 720, che equivale a 500, il secondo termine si cangia in I; e conseguentemente la ragione per la riduzion a campi in dodicadica sarà invertendola u3000 : 3u01. Inoltre il primo termine aumenterassi di quattro zeri, perchè sono quattro le duodecimali tra l'una, e l'altra dimensione; e sarà così omogeneo al prodotto G; e perciò fatta l'analogia u30000000 : 3u01 :: 189187u : (Camp. 5:9:6:10:0:3:8:€:6:8); e nel quarto termine ridotte all'aritmetica comune la terza frazione 10 = 12, e la settima € = 10: si trova nè più nè meno, quanto si è trovato antecedentemente. Si consideri il calcolo soprascritto, in cui dopo la prima divisione, che in K dà Campi 5 nel quoziente, si è moltiplicato il residuo L per 20 = 24, onde aver Vanezze 9; dipoi per 26 = 30 il secondo residuo M per aver le Tavole 6; in terzo luogo per 30 = 36 il terzo residuo N, che offre il quoziente 10 = 12 piedi; ma per tutti gli altri residui, che seguono, non occorre di vantaggio, che aggiunger un zero ad ogni residuo, lo che equivale a moltiplicarlo per 12 a fine di conseguir le oncie, punti, atomi, minuti, e le due duodecimali, che seguono, dopo le quali il residuo è zero. Chi ama esercitarsi nel maneggio dell'aritmetica di dodici caratteri, potrà farne il riscontro, essendo ogni operazione distinta; anzi un intelletto esperto nelle Aritmetiche ravviserà, che invece di aggiunger il zero alli residui da dividersi, sarà meglio scemarlo al divisore in più d'una divisione; il che non si spiega ulteriormente, dopochè ciò sarebbe cosa lunga.

Mettendo pertanto al confronto le due maniere usate nella risoluzione di questo Problema: si vedrà apertamente, quanto sia più breve la seconda; poichè l'occhio stesso ne fa conveniente giudizio dalla maggior moltitudine di caratteri, che scorge nella prima, comprese le due operazioni O, che sono per li due quadrati delli due termini di ragione 71:18, le quali corrispondono alle due operazioni H nella seconda per li quadrati della proporzione medesima in aritmetica dodicadica; oltre di che le operazioni G I M N sono men faticose e moleste delle sue omogenee A C D.

Resta ora da rappresentar pure sotto l'occhio la stessa risoluzione con tradurre le due dimensioni espresse in funicoli alle denominazioni in pertiche; e poi farne il calcolo onde ritrarne lo stesso valore come prima; e si vedrà forse che la prolissità non è sì grande come alcuno avrebbe potuto credere; ma la moltiplicità delle frazioni, che accompagnano le pertiche, generate di più sino a raddoppiarsi ne l'una e l'altra delle misure tradotte, non è per verità d'una molestia indifferente. La traduzione si fa già per via della regola del tre, invertendo la ragione suddetta, cioè facendo 18:71; dove si ha da osservare una particolar facilità per conseguir dopo le pertiche li piedi, oncie, punti &c:

voglio dire che tradotti li funicoli della detta lunghezza in P secondo il metodo ordinario, introducendo nella moltiplicazione la denominazion 6 dei piedi, e poi 12 per quella delle oncie &c: per tradur li funicoli della larghezza Q si sono lasciate nella moltiplicazione tutte le denominazioni del 12; e fatta poi la divisione per 18 con la mente senza scriverlo, si è presa la metà d'ogni frazione del quoziente R, con che si conseguiscono ugualmente le denominazioni di piedi, oncie, punti &c. La moltiplicazione, veramente laboriosa per l'intensione di mente in eseguirla delle due misure tradotte, è descritta in S; la quale però porta seco la brevità, che ridotti gl'intieri a campi, e vanezze secondo la pratica in T, non si procede più avanti per aver le frazioni susseguenti alle vanezze; poichè le tavole sono il residuo della divisione per 30; e li piedi, oncie, punti &c sono le altre frazioni in continuazione sotto il prodotto, ridotte prima col nuovo metodo della moltiplicazione per 6.

Funicoli 17:11:7
71
1207
P 35:3
17:4:6
11:5
2:5:9
-:2:11:6
1275:3:2:6
Pert.e ---70:5:2:1:8

Funic.li 13:10:5
71
923
Q 59:2
2:5:7
984:7:7
R 54:8:5:4:8
Pert.e 54:4:2:6:4

Pert.e 54:4:2:6:4
Pert.e 70:5:2:1:8
3780
27
18
1:3
-:-:4:6
-:-:2:3
-:-:-:9
S 35:2:7:-:10
11:4:10:4:3:4
1:5:9:8:8:6:8
-:2:11:5:2:1:8
-:-:1:11:7:5:5:1:4
3876:2:-:-:7:5:9:1:4
6
Tavole 3876:12:-:3:8:10:6:8:-
276
6

720:30
T Campi 5:9:6:12:-:3 &c

Problema II con frazioni generiche, risolto anche per logaritmi.

Si dimanda il prezzo d'un terreno lungo pertiche $31\frac{5}{18}$, largo pertiche $29\frac{7}{16}$, stimato ₯ 209:-:4 dal grosso, cioè £1296 in ragion di campo.

Si moltiplichino per il denominator 18 le pertiche 31, e aggiunto al prodotto il numerator 5, la lunghezza sarà pertiche $\frac{563}{18}$; e la larghezza con simile operazione sarà pertiche $\frac{471}{16}$. Moltiplicate fra di se queste due frazioni si avrà nel prodotto la terza frazione $\frac{265173}{288}$, che avendo tanto il numerator che il denominatore divisibili per 3, diventa $\frac{88391}{96}$. Questa poi per cagion della stima in ragion di campo dovrà essere moltiplicata per la quarta frazione $\frac{1296}{720}=\frac{9}{5}$ mediante il comune divisore 144. Ma perchè avviene tuttavia, che il denominator 96 della terza, e il numerator 9 della quarta si posano divider per 3: le due frazioni da moltiplicarsi saranno $\frac{88391}{32}\cdot\frac{3}{5}$; e fatta la moltiplicazione, il prezzo del terreno sarà $\frac{265173}{160}$, cioè esso pure una frazione, ma di quelle, che diconsi spurie, avvegnachè il numeratore comprende il denominator. Si divida pertanto quello per questo, come dimostra la operazione A che è secondo l'ordinario metodo degli Aritmetici; e si vedrà, che il prezzo del terreno è £1657: 6: $7\frac{1}{2}$, che ridotte a Ducati da £6:4 fanno ₯267, lirei, soldi 18, danari $7\frac{1}{2}$ senza che sia stato necessario di determinar prima la quantità de' campi, vanezze, tavole &c; il che avrebbe moltiplicate assaissimo le operazioni, e con fatica non lieve alla mente, quando potevano risparmiarsi, come si è fatto, giacchè dal problema non si ricercano.

160
£ 1657:6:7:$\frac{1}{2}$ A

265173
1051
917
1173
53
20
1060
100
12
1200
80

Per logaritmi. Questa risoluzione suppone le tre frazioni $\frac{563}{18}$ $\frac{471}{16}$ $\frac{1296}{720}$; e siccome devono esser moltiplicate fra loro, così per procedere più speditamente si prendono dei tre numeratori 563, 471, 1296 li tre logaritmi B C D de' quali si fa la summa E; e similmente li tre F G H delli denominatori 18, 16, 720, che facciano la summa I. Questa poi sottratta da quella lasci la differenza K, che sarà il logaritmo del prodotto delle tre frazioni, cioè del prezzo del terreno. Si cerchi adunque il logaritmo K nelle tavole; e dopochè non vi si riscontra il preciso, si tolga il prossimo minore L a cui corrisponde il numero assoluto 1657, cioè le lire del prezzo. Sottratto L da K, si moltiplichi la differenza 868 per 20; e diviso il prodotto per la differenza 2620 del logaritmo L dal suo prossimo maggior tavolare M continuando la operazione, come si vede nella figura, si troveranno gli altri numeri, cioè li soldi 6, danari $7\frac{1}{2}$ poco più di $\frac{2}{262}$; differenza ordinaria ne' logaritmi, ma di niun conto perpetuamente.

F 12552725 log. di 18
G 12041200 log. di 16
H 28573325 log. di 720
53167250

M 32195845 log. di 1658
L 32193225 log. di 1657
2620
6:7 $\frac{67}{131}$

B 27505018 log. di 563
C 26730209 log. di 471
D 31126050 log. di 1296
E 85361343
I 53167250
K 32194093 log. di 1657:6:$7\frac{1}{2}$
L 32193225 log. di 1657
868
20
17360

Prova. *Si riducano in N O le frazioni generiche delle misure alle specifiche sotto le denominazioni di piedi, oncie ℘, che si esigono dalle divisioni, e suddivisioni della pertica; e poi si faccia la moltiplicazione P di ambedue le dette misure così ridotte; poichè uscirà nel prodotto Q la quantità del terreno in tavole, piedi ℘, chè moltiplicata dal valore R in ragion di campo; e per conseguenza diviso il prodotto S per 720 sino all' ultima minuzia, comparirà ugualmente nel quoziente T, quanto si è ritrovato con gli altri due calcoli anteriori per frazioni, e per logaritmi.*

```
        720        £1193278:10
T £1657:6:7½       4732
                   4127
     18:5::6       5278
Pied.1:8   5        238
N         30         20
          12       4770
          12        450
         144         12
                   5400
     16:7::6        360
Pied.2:7:6  7
O         42
          10
          12
         120
           8
          12
          96
```

```
  Tav.² 920:26:7:6            Pert.² 31:1:8
R £ 1296                      Pert.² 29:2:7:6
     25920                          279
  11664                              62
       648                           10:2
       216                            2:3:6
        72                       P    -:2:7
        18                            -:1:3:6
         3                            4:5:5:3
         1:10                         2:2:8:7:6
S £ 1193278:10                        -:4:10:10:6
                                    920:4:5:3:-
                                             6:-
                              Q Tav.² 920:26:7:6
```

Problema III con una dimensione di più dell' antecedente.

Ritrovar il prezzo d' una quantità di fieno lungo piedi $19\frac{7}{16}$; largo piedi $17\frac{7}{9}$; alto piedi $13\frac{5}{8}$, che è stato accordato per £ $89\frac{61}{80}$ in ragion di piedi 504 cubici.

*Riducendo le misure a frazioni spurie, la lunghezza diviene $\frac{311}{16}$, la larghezza $\frac{160}{9}$, l' altezza $\frac{109}{8}$. Il prezzo ancora si cangia in £ $\frac{7181}{80}$, come si vede fatto, ove indica l' asterisco *; e così le frazioni da moltiplicarsi sono quattro; ma vuol entrarvi anche la quinta, cioè $\frac{1}{504}$, che compie la soluzione del Problema. Dunque procedendo aritmeticamente, si dovranno fra se moltiplicare tutti li numeratori 311·160·109·7181·1, la qual operazione si vede eseguita nel prodotto A; dipoi tutti li denominatori 16·9·8·80·504, come apparisce in B. E comecchè deve uscire un altra frazione spuria: per il prodotto B si dividerà il prodotto A; avvegnachè nel quoziente C sarà manifesto il prezzo richiesto, cioè £ 838:10:7 $\frac{1739}{6048}$, di cui l' ultima frazione generica deriva dal comune massimo divisor 768, che hanno li due numeri B D.*

```
   19 7/16    17 7/9    13 5/8          16            311
      16          9         8            9            160
*  311        160       109            144          49760
                  *                      8            109
         89 61/80                     1152         447840
            80                          80         4976
*         7181                        92160       5423840
                                        504          7181
                                     368640       5423840
                                  460800         9762912
                                B 4644864.0      3796688
                            C £ 838:10:7 1739/6048
                                               A 38948559504.0
                                                 17896830
                                                 39622384
                                                  2463472
                                                       20
                                                 49269440
                                                  2820800
                                                       12
                                                 33849600
                                               D  1335552
```

Mostrano le piccole operazioni E, come le frazioni generiche siano state ridotte alle denominazioni specifiche di oncie, e punti convenienti alla misura del piede; e di bel nuovo col metodo volgare di tali misure tradotte si sono fatte le tre moltiplicazioni F G H, sicchè non resti che divider per 504 l' ultimo prodotto H; per cui fatta la divisione I, nel quoziente K risultano ugualmente che prima £ 838:10:7 $\frac{1739}{6048}$.

```
 16:7::12     9:7::12
 5:3    7     9:4    7
       84           84
        4            3
       12           12
       48    E      36
        0            0

 8:5::12     80:61:20
 7:6    5    15:3  20
       60        1220
        4          42
       12           2
       48          12
        0          24
                    0
```

```
  Pied. 19:5:3
  Pied. 17:9:4
    323                 171
      7:1               14:3
      -:4:3
     14:3:-
      -:3:9
      -:-:2:3
      -:6:4:-
      -:-:1:8
      -:-:-:1
F Pied. quadr. 345:6:8:-
      Pied.   13:7:6
   4485                 2415
      6:6               201:3
      -:8:8
    201:3:-             2070
      -:3:6             172:6
      -:-:4:8            14:4
     14:4:6:-
      -:-:3:4
G Pied. cubici 4708:2:4:-

       504
K £ 838:10:7 1739/6048
```

```
     4708:2:4:-
  £    89:15:3
   42372
  37664
    2354
    1177
      58:17
      14:19:2:6
       2:9:10:5
H 422619:6:-:11
    1941
    4299
I    267
      20
    5346
     306
      12
    3672
     144
      12
    1739
```

Ma le frazioni del piede, e così ancora quelle del soldo, che si costumano divise, e suddivise in parti duodecime, potendo facilitare, ed abbreviare le mol:

tiplicazioni delle tre misure non meno, che del prezzo, col far uso dell' aritmetica di dodici caratteri: si convertano le ₤ 89:15:3 in soldi, moltiplicando per 20 l'89, e aggiungendo al prodotto il 15; e si avranno soldi 1795:3. Si trasportino in detta aritmetica tutti li numeri intieri, che intervengono in questo conto; e la frazione spuria $\frac{1753 \cdot 1594 \cdot 1176 \cdot 10573}{360}$ potrà in certo modo rappresentare in ristretto le funzioni, che deve fare ciascun di loro. Quindi eseguite le moltiplicazioni dei costituenti il numeratore, si dovranno recidere sette note a destra del totale prodotto, le quali indicheranno le frazioni duodecimali, una in seguito dell' altra; e le note rimanenti a sinistra significheranno gl' intieri sotto il nome di soldi. Fatta poi la divisione per il denominatore 360: il quoziente L, esso pure sotto il nome di soldi, sarà il valor preciso del fieno, che trasportato in aritmetica di dieci caratteri, e poi ridotto a lire, darà nè più nè meno ciò che si è veduto. Tralasciate le operazioni, che trasportano i numeri dall' una all' altra aritmetica, perchè sono facili da vedersi: metto sotto l'occhio le altre, che mostrano il calcolo intero, e quelle ancora, che restituiscono i numeri all' aritmetica comune: voglio dire il quoziente L restituito in M; e li due numeri, che formano la frazione generica, restituiti in N O.

```
 100u        360ƨ            360                    1753
  12          12     L soldi 9856:7 100u/360ƨ       1594
  12          42                                    6590
  12          12                                   12643
 144         504       9856:7                       8123
  12          12        12                          1753
N 1739     O 6048      116                       2490800
                        12                          1176
                      1397                      12494000
                        12                        149ƨ28
                 sol. 16770                       272428
                 M ₤  838:10:7                2884240000
                                                   10573
                                              8210700000
                                              1706544
                                              1175848
                                              288424
                                              2947516·0400000
                                               2575
                                                1751
                                                1416
                                                 2160
                                                 100u
```

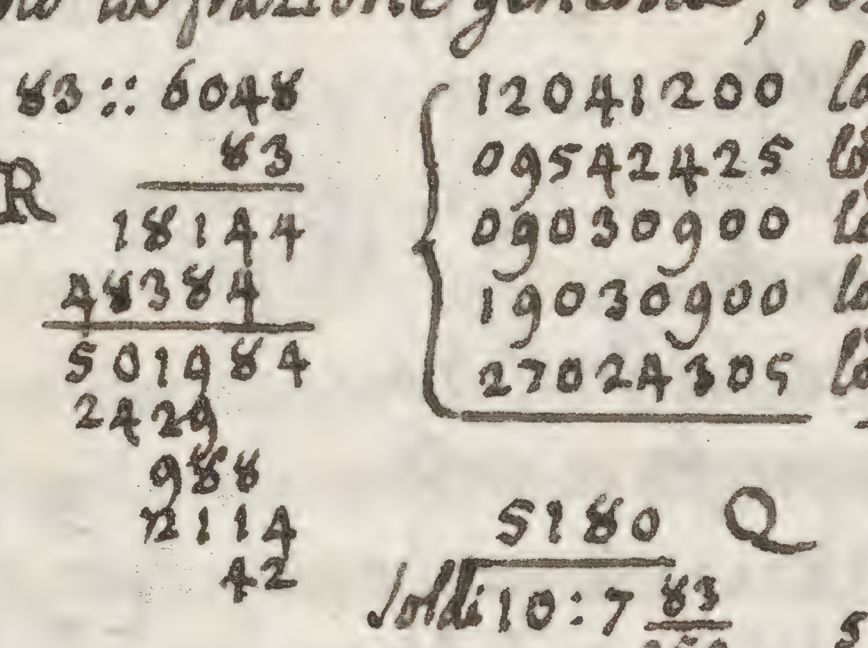
Non bisogna ommettere di far vedere, come si portino in questo problema i logaritmi; e comechè il maneggio dè medesimi è non meno facile che semplice, non s'impiegheranno parole a descriverlo; avvegnachè nulla più importi che dalla summa dè logaritmi di tutti li numeratori 311·160·109·7181 sottrar la summa dè logaritmi di tutti li denominatori 16·9·8·80·504 delle frazioni maneggiate da principio; e la differenza sarà il logaritmo P del prezzo, che si cerca, il quale eccede di circa $\frac{199}{6048}$ di dànaro, come dimostrano le operazioni Q R.

```
 259 : 83 :: 6048        12041200  log. di  16     24927604  log. di  311
1938                      09542425  log. di   9     22041200  log. di  160
1739    R        83       09030900  log. di   8     20374265  log. di  109
 199          18144       19030900  log. di  80     38561849  log. di 7181
              48384       27024305  log. di 504    105904918
             501984                                 76669730
              2429                               P  29235188  log. di ₤ 838:10:7 83/259
               988     5180  Q      2748            29232440  log. di  838
              2114   Soldi 10:7 83/259  20
                42                   54960
                                      3160
                                        12
                                     37920
                                      1860
```

Problema IVª in continuazione.

Di una Camera, che ha la figura d'un parallelepipedo rettangolo, trovar il valor della diagonale AD, che giace fra li due angoli opposti A D, essendo note le di lui tre dimensioni, cioè la lunghezza AB piedi 34:7; la larghezza BC piedi 32:1; l'altezza CD pie. 26:5:7.

Sul fondamento della Propoſiz.ᵉ 47 del p.ᵐᵒ degli Elementi conviene far il quadrato d'ogni dimensione, unir poi tutti tre insieme li quadrati, e cavar la quadrata radice dalla summa; poichè sarà essa il valor della diagonale.




```
   2ε7         281           2257
   2ε7         281           2257
  1821         281          13531
  249ε        1948          4u5u
  592          542          4402
E 83801     F 71941         4402
                          G 4ε44421
                            83801
                            71941
   I                      H 18399121
   4                         459
   86                        991
   901                      9021
   9021                      000
```

Per ciò fare l'aritmetica di dodici caratteri è la più pronta, quando sappiasi come maneggiarla. La prima dimensione diviene 2ε7 il cui quadrato E; la seconda 281, che ha il quadrato F; la terza 2257 e il suo quadrato G. Nell' unir insieme questi tre quadrati si avverta, che li due primi E F devono esser posti sotto il quadrato G per due località più indietro; avvegnachè essendo mancante il lato d'ognun di loro della frazione duodecimale seconda, da cui è accompagnato il lato del terzo: si dee supporre, che li due primi

quadrati abbiano dopo se aggiunto il carattere zero. La summa dunque sarà H; e cavata la detta radice I, in aritmetica di dodici caratteri sarà piedi 46:1:1, che in aritmetica comune diventa piedi 54; oncie 1; punti 1, valore preciso della diagonale AD, ovvero CK, come si avea proposto di fare.

Facendo li quadrati delle misure, come sono state proposte, cioè secondo la pratica ordinaria: il primo sarà L, il secondo M, il terzo N; e la loro summa sia O; ma per cavar da questa la radice convien ridurla sotto le denominazioni delle duodecimali quarte, cioè in minuti, come appare dalle quattro moltiplicazioni per 12 una in seguito dell'altra sino all' ultimo prodotto P; da cui cavata la radice Q, uscirà espressa in punti, de' quali fatta la divion due volte per 12, come in R, si riscontrerà la stessa diagonale in piedi 54, oncie 1, e punti 1, in tutto come prima.

```
      34:7          32:1            26:5:7              1196:-:1
      34:7          32:1            26:5:7              1029:4:1
     ------        ------          --------              700:4:11:2:1
     136           1024            156                 -----------------
    102               2:8          52                  O 2925:9:1:2:1
      19:10           2:8:1          10:10                  12
      19:10       -----------        1:3:2                -------
         4:1      M 1029:4:1         10:10                 35109
  L -----------                      -:2:1                   12
    1196:-:1                         -:-:2:11              -------
                                     1:3:2                 421309
                                     -:-:2:11                 12
                                     -:-:-:4:1             -------
                                 N 700:4:11:2:1            5055710
                                  ==============               12
                                       7789                -------
                                       649:1             P 60668521    Q
                               R Piedi 54:1                1166          7
                                                           13785       147
                                                           140121     1548
                                                             0000    15569
```

All' opposto cercando la stessa cosa per logaritmi, si potrebbe avvertire, che questo non è problema da risolver per essi, mentre le operazioni si raddoppiano, cioè non tanto perchè si devono ridurre all'ultima minuzia le misure per trarne poi dalle tavole i logaritmi corrispondenti; ma ancora perchè dovendoli duplicare onde conseguirne i quadrati, questi non potranno riscontrarsi nelle tavole, che sono troppo brevi e limitate; e però sarà di mestieri con discapito della precisione far uso dei soliti ripieghi e non brevi in simili casi. Per compiacere a chi è nuovo in questo studio si convertano in oncie le prime due dimensioni a b, e in punti la terza c. Il logaritmo di a sia S; e moltiplicato per 2, a fine di avere per logaritmi il suo quadrato: si vedrà, chè per la caratteristica 5 non si trova nelle tavole: dunque si scemi la detta caratteristica di 2 unità, e si cerchi qual numero corrisponde al logaritmo 32360962; e si vedrà, ch'egli è il 1722. Maneggiata poi le differenze T sino alle centesime, se ne troveranno 25. Si uniscano queste due note 25 al numero 1722; e il corrispondente ~~..~~ al log. 52360962 sarà il 172225. Operando similmente per la seconda misura b, si avrà il numero 148225, come appare alla lettera V. Ma per la terza più ampla nei caratteri, che la costituiscono, converrà maneggiar le differenze sino alle diecimillesime, togliendo 4 unità alla caratteristica 7 del doppio logaritmo di 3811, cosicchè il tutto eseguito si trovi il num.° 14523719 li tre numeri usciti devono esser li quadrati delle tre misure a b c, come li primi sono tali di fatto; ma il terzo è mancante di quasi 2 unità, il che però non sarà di molta sostanza.

```
  34:7    32:1    26:5:7
   12      12       12
  ----    ----    ------
  415     385      317
   a       b        12
                  ------
                   3811
                    c
```

```
S 26180481 log. di 415
         2
---------------
  52360962 log. di 172225
                        144
  2522    6310     ---------
  ----   12660      688900
   25  T   850     2411150
                  ---------
                  24800400
===========================
  25854607 log. di 385
         2
---------------
  51709214 log. di 148225
                        144
  2929    7320     ---------
  ----   14620      592900
   24  V  2904      592900
    1               148225
  ----             ---------
   25              21344400
===========================
  35810389 log. di 3811
         2
---------------
  71620778 log. di 14523719

  2990    11120
  ----    21500
  3719     5700
          27100
            190
===========================
Y 37829024 log. di 6066
  4    610
---------------
Z 77829634 log. di 60668519
& 38914817 log. di 7789
```

Rimane adesso da far la summa dei tre numeri trovati; ma questa esige prima una briga inaspettata e che dilunga alquanto l'operazione, dovendosi riflettere, che li primi due quadrati esprimono punti dopochè sono oncie le sue radici; e che il terzo non può esprimere che minuti, quando la sua radice è denominata da punti. È necessario dunque ridurre eziandio a minuti li due primi, a fine di renderli omogenei col terzo, allorchè si voglia legittima la summa; il che si fa col moltiplicare il primo e secondo numero per 144, come dimostrano le operazioni in rosso. Si uniscano insieme li tre numeri e facciano la summa X, da cui estraendo la radice quadrata sarebbe sciolto il problema; ma siccome si vuol procedere per logaritmi: bisogna investigar qual sia il logaritmo del numero X, perchè nella tavole anche maggiori, che vanno sino al centomille, non si trova sicuramente, avvegnachè la loro caratteristica non ol=

```
   24800400            8519
   21344400             716
   14523719          --------
 ------------         136304
 X 60668519           59633
                     --------
                     6099604
```

trepassa il 5 mentre il numero X ha per caratteristica il 7. Non avendo io pertanto le tavole, che ho detto, e dovendomi prevalere delle minori: al numero X levo le quattro ultime note 8519, e tolgo il logaritmo Y delle quattro rimanenti 6066 con la sua differenza 716 dal logaritmo prossimo maggiore. Instituisco poi una regola di proporzione sino alle decimali quarte, facendo 10000 : 8519 :: 716 : 610; e aggiungo il quarto termine 610 al logaritmo Y, accrescendo anche la caratteristica di 4 unità, per cui ho il logaritmo Z della summa X. Di questo prendo la metà &, che nelle tavole riscontrata, la trovo precisa, e mi offre la diagonale sotto la denominazion di punti 7789, cioè piedi 54, oncie 1, punti 1, senza nissuna differenza dalle altre ritrovate di sopra.

Per le molte operazioni fatte in questo metodo assai più, che negli altri due praticati antecedentemente, ho detto con tutta ragione che questo problema non è da risolversi per logaritmi; contuttociò avendo voluto tentarlo, si avrà veduto, quanto meriti di stima la invenzione di essi per l'armonia, e accordo mirabile, che conserva con gli altri metodi, quale istrumento che risparmia in tant' incontri fatica molta, che andando per le vie della Geometria, dovrebbe incontrarsi.

Problema villereccio. *Sette Pastori hanno tolto in affitto un pascolo diviso in undici prese, le quali hanno le misure connotate inferiormente secondo le lettere A B C D E F G H I K L; per il prezzo di ₶ 23 £ 3: 8 dal grosso. Due pastori hanno pascolato le tre prese A B C, uno con pecore 45 e l'altro con pecore 57. Due altri hanno pascolato D E F G, le pecore de' quali uno in riguardo all'altro erano 52, e 65; e tre pastori hanno pascolato le restanti H I K L con pecore 32, 48, 84 respettivam.te Si dimanda il riparto dell'affitto, che tocca ad ogni pastore in relazione alla sua porzione avuta di pascolo*

	Lunga pert.e	Larga pert.e
A	23: 3: 2	19: 4: –
B	32: 5: 8	17: 1: 6
C	28: –: 4	18: 1: 4
D	13: 2: 1	11: 2: 7
E	15: 5: 10	14: 5: 6
F	19: 3: –	16: 1: –
G	20: –: –	10: 4: 8
H	29: 5: –	7: 5: 11
I	34: 3: –	16: 2: 10
K	36: 2: 8	14: –: 2
L	32: 2: –	9: 4: 6

Per questa risoluzione è necessario far il calcolo dell'estension d'ogni presa; e questi veggonsi nelle moltiplicazioni infrascritte, li di cui prodotti sono tavole.

23: 3: 2
19: 4: –
437
15: 2
9: 5
–: 3: 3: 4
A 462: 4: 3: 4

32: 5: 8
17: 1: 6
544
5: 2
2: 4
8: 3: 9
5: 4: 6
1: 5: 6
B 568: 1: 9

28: –: 4
18: 1: 4
504
4: 4
1: 3: 4
1: –: –: 10: 8
C 511: 1: 4: 10: 8

3 – 2: 8

13: 2: 1
11: 2: 7
143
4: 2
1: –: 6
–: 1: 1
3: 4: 10: 4
–: –: 11: 5: 2
D 152: 3: 4: 9: 2

15: 5: 10
14: 5: 6
210
7: 3
5: –
1: 1: 6
7: 2: 9
4: 5: 10
1: 3: 11: 4
–: 2: 5: 10
E 238: 1: 6: 2

19: 3
16: 1
304
3: 1
8: –: 6
F 315: 1: 6

20: –
10: 4: 8
200
13: 2
2: 1: 4
G 215: 3: 4

29: 5
7: 5: 11
203
14: 3
9: 4
3: 1: 4
1: 1: 3
3: 5: 11: 6
2: 3: 11: 8
H 238: 1: 6: 2

34: 3
16: 2: 10
544
11: 2
3: 4: 8
–: 5: 8
8: 1: 5
I 568: 1: 9

36: 2: 8
14: –: 2
504
1
4: 4: –: 8
1: 3: 4: 2: 8
K 511: 1: 4: 10: 8

32: 2: –
9: 4: 6
288
16
5: 2
2: 4
3: 1: 6
L 315: 1: 6

A 462: 4: 3: 4
B 568: 1: 9: –
C 511: 1: 4: 10: 8
M 1542: 1: 5: 2: 8

D 152: 3: 4: 9: 2
E 238: 1: 6: 2: –
F 315: 1: 6: –: –
G 215: 3: 4: –: –
N 921: 3: 8: 11: 2

H 238: 1: 6: 2: –
I 568: 1: 9: –: –
K 511: 1: 4: 10: 8
L 315: 1: 6: –: –
O 1633: –: 2: –: 8

M 1542: 1: 5: 2: 8
N 921: 3: 8: 11: 2
O 1633: –: 2: –: 8
P 4096: 5: 4: 2: 6

m 1542
n 922
o 1633
Q 4097

4097: –: –: –: –
4096: 5: 4: 2: 6
R 0: 0: 7: 9: 6
6
Piedi 3: 10: 9: –

Siccome in questo riparto intervengono tre società, cioè di due pastori sì la prima che la seconda e di tre pastori la terza: allorchè importi solam.te aver la quota d'ogni pastore, cioè la porzione, che ha da pagare ogn' individuo senza curar di sapere, quanta sia quella d'ogni società, il calcolo si potrà fare più breve; poichè sebbene sia necessario cercar prima le quote delle tre società per venir poi in cognizione di quelle d'ogni pastore: pure le prime si potranno risolvere per frazioni in genere (il che è quasi lo stesso che il non conoscerle) senza venire alle frazioni specifiche; e in tal modo evitare quella prolissità, da cui per ordinario sono esse accompagnate. Inoltre siccome convien unir in summa tutti li prodotti, che appartengono a cadauna società da per se, e poi delle medesime il cumulo: l'aggregato di quelli si

vede in M N O, e di questa in P, ma però accompagnato da una serie di frazioni, che non volendole trascurare, sarebbe oltre modo faticoso e molesto da maneggiare. Per la qual cosa non essendo necessario nel riparto un rigor matematico: gioverà alla summa P sostituire libera da ogni minuzia la summa Q, maggiore di piedi 3, oncie 10, e punti 9, come apparisce in R; differenza che giustamente merita d'esser negletta a fronte dell'enorme espansion de' numeri, che uscirebbono dalle moltiplicazioni, allorchè si volesse conservarla. Pertanto le tre analogie, che occorrono per le tre società saranno le descritte in figura, gli ultimi termini delle quali dinotano le tre quote, che appartengono alle dette società, e sono frazioni spurie, che esprimono la quantità delle lire; e che diverranno terzi termini nelle altre analogie da farsi per ogni pastore in proporzione del numero delle sue pecore.

$$4097 : 1542 :: £146 : \frac{225132}{4097}$$

$$4097 : 922 :: £146 : \frac{134612}{4097}$$

$$4097 : 1633 :: £146 : \frac{238418}{4097}$$

Prima società pecore 45+57 = 102.
Seconda società pecore 52+65 = 117.
Terza società pec.^e 32+48+84 = 164

Posteriormente si veggono le summe delle pecore di cadauna società, le quali devono esser i primi termini rispettivi delle

$$102 : 45 :: \frac{225132}{4097} : \frac{45.225132}{102.4097} = \frac{15.112566}{17.4097}$$

$$102 : 57 :: \frac{225132}{4097} : \frac{57.225132}{102.4097} = \frac{19.112566}{17.4097}$$

$$117 : 52 :: \frac{134612}{4097} : \frac{52.134612}{117.4097} = \frac{4.134612}{9.4097}$$

$$117 : 65 :: \frac{134612}{4097} : \frac{65.134612}{117.4097} = \frac{5.134612}{9.4097}$$

$$164 : 32 :: \frac{238418}{4097} : \frac{32.238418}{164.4097} = \frac{8.238418}{41.4097}$$

$$164 : 48 :: \frac{238418}{4097} : \frac{48.238418}{164.4097} \quad \frac{12.238418}{41.4097}$$

$$164 : 84 :: \frac{238418}{4097} : \frac{84.238418}{164.4097} \quad \frac{21.238418}{41.4097}$$

sette analogie susseguenti per il numero delle pecore di cadaun pastore, il qual numero deve esser il termine secondo. L'ultimo termine poi d'ogni analogia si è semplicemente enunziato per risolverlo con quell'avvantaggio, che può mostrare anche a prima vista senza prendersi la cura d'investigarne il massimo, cosa che dilungando le operazioni, distruggerebbe il vantaggio stesso. Risolti adunque tutti gli ultimi termini; il che non consiste in altro che in ridurre le frazioni spurie generiche alle denominazioni specifiche di lire, soldi denari e niente più, abbandonando gli ultimi residui: si troveranno le quote d'ogni pastore, distinte dal numero delle pecore S; e derivano dalle infrascritte operazioni, rese

4097 × 17 = 28679; 4097; 69649
£24:4:10
£30:14:1
£54:19:–

112566 × 15 = 1688490; 295510; 16914; × 20 = 338280; 59684; × 12 = 716208; 19718

112566 × 19 = 2138754; 49284; × 20 = 985680; 284190; 10594; × 12 = 127128; 57479

4097 × 9 = 36873
£14:12:–
£18:5:1
£32:17:1

134612 × 4 = 538448; 169718; 22226; × 20 = 444520; 75790; 2044; × 12 = 24528

134612 × 5 = 673060; 304330; 9346; × 20 = 186920; 2555; × 12 = 30660

4097 × 41 = 4097; 16388; 167977
£11:7:1
" 17:–:7
" 29:16:1
2
£58:3:11

238418 × 8 = 1907344; 227574; 59597; × 20 = 1191940; 16101; × 12 = 193212; 25235

238418 × 12 = 2861016; 1181246; 05407; × 20 = 108140; × 12 = 1297680; 121841

238418 × 21 = 5006778; 1647238; 135445; × 20 = 2708900; 1049130; 21268; × 12 = 255216; 87239

Prima società £54:19:– Seconda società £32:17:1. Terza società £58:3:11.

più facili con aver prima ridotti per ogni società i numeri delle pecore a termini minimi, onde sostituirvi 15+19 = 34 nella prima; 4+5 = 9 nella seconda; 8+12+21 = 41 nella terza, per cui gli ultimi termini divengono, come si veggono di sopra scritti in rosso. Risolvendo le tre prime analogie, cioè trasportando gli ultimi termini alle denominazioni di lire, soldi, e danari: si troverà il riparto delle tre società, come lo mostrano le divisioni seguenti

Pecore	45 –	£24:	4:10
	57 –	" 30:	14: 2
	52 –	" 14:	12: 1
S	65 –	" 18:	5: 1
	32 –	" 11:	7: 1
	48 –	" 17:	–: 8
	84 –	" 29:	16: 1
℔23 £3:8 –		£146:	–:–

225132 ÷ 4097 = £54:19:–
20282; 3894; × 20 = 77880; 36910; 037; × 12 = 444

134612 ÷ 4097 = £32:17:1
11702; 3508; × 20 = 70160; 29190; 511; × 12 = 6132; 2035

238418 ÷ 4097 = £58:3:10
33568; 792; × 20 = 15840; 3549; × 12 = 42588; 1618

Prima società £54:19:–:444
Seconda società " 32:17:1:2035
Terza società – " 58:3:10:1618
Come sopra £146:–:–:4097

Problema di Agrimensura. *Ritrovare le due dimensioni, le quali avendo fra di se la proporzion de' numeri 7 : 3, comprendono l'estensione d'una campagna del prezzo di ₰ 3223 ₤s : 19 : 1⅛ dal grosso a norma della stima di ₰ 182 ₤s : 12 il campo.*

Per la moltiplicità de' rotti, che accompagnano il prezzo, e la stima, niuno può dispensarsi dal liberarne e l'uno e l'altro, riducendo tutti e due in ottavi di danaro, come si vede fatto, ove segnano le lettere A B. *Si faccia poi la stima* $A = s$, *il prezzo* $B = p$; *la proporzione* $7 : 3 = m : n$; *e posta* x *una dimensione, la seconda dimensione sarà* $\frac{nx}{m}$, *mediante l'analogia* $m : n :: x : \frac{nx}{m}$. *Moltiplicando le due dimensioni fra di se, la estensione della campagna sarà* $\frac{nx^2}{m}$; *ma dovendola valutare secondo la stima in ragion di campo, che si compone da tavole 720, quando le dimensioni moltiplicandosi producono tavole: fatto* $720 = c$, *convien prima dividere per* c *l'estensione, e si avrà* $\frac{nx^2}{cm}$. *Valutandola poi per la stima* s, *uguaglierò il suo prezzo* p, *onde si abbia l'equazione* $\frac{nsx^2}{cm} = p$; *e svolgendo* $nsx^2 = cmp$; $x^2 = \frac{cmp}{ns}$; *finalmente si conchiuda* $x = \sqrt{\frac{cmp}{ns}}$.

```
  ₰ 182:5:12          ₰ 3223:5:19:1⅛
      6:4                   6:4
   1092                 19338
     36:8                 644:12
      5:12                  5:19:1⅛
L ₤ 1134:-            19988:11:1⅛
     20                     20
  22680                399771
     12                     12
  272160               4797253
       8                     8
A 2177280           B 38378025
        3                    720
E 653184              767560500
  213192             268646175
   77112            C 27632178000
    9072                       7
    0000            D 193425246000
                       6278844
                        4001886
                         827820
                         1746360
                          439992
                           13608
                        F   4536
```

La frazione sotto il segno radicale si risolve nella seguente analogia, cioè $n : m :: \frac{cp}{s} : \frac{cmp}{ns}$, *dalla quale si comprende, che se il secondo termine è maggior del primo, uscirà nell'ultima risoluzione la dimension maggiore, cioè la lunghezza della campagna, e viceversa la larghezza. Per la qual cosa moltiplicato il prezzo* B *per 720, si moltiplichi di nuovo il suo prodotto* C *per 7, e faccia* D; *e moltiplicato per 3 il numero* A *faccia* E, *e dividasi* D *per* E; *poichè cavata dal quoziente la radice quadrata, sarà essa una dimensione espressa in pertiche. Se le dimensioni siano razionali:* $\frac{D}{E} = \frac{19342524600}{653184}$ *sarà sempre una frazione, li di cui termini minimi saranno due quadrati, quale appunto è la presente, che ha per comune massimo divisore il numero* F; *e che sbassata apparisce in* G *sotto altri numeri, l'uno e l'altro quadrati. La radice del denominator è il 12, e 2065 è quella del numerator, come si mostra in* H; *e fatta la divisione di questa per quella, si manifesta in* I *la dimension maggiore, cioè la lunghezza in Pert.*ᵉ *172, pied. 0, onc. 6, secondo ciò che si è avvertito; e fatta la regola del tre* $7 : 3 ::$ *Pert.*ᵉ *172, 0, 6 : Pert.*ᵉ *73, 4, 6 il quarto termine sarà la dimension minore, cioè la larghezza Pert.*ᵉ *73, pied. 4, onc. 6, come si dovea fare.*

```
653184          4536          19342524600
 19958       G 4264225          11985
  18144          144             29132
   0000                           19164
              H                    10206
   2065       2                     11340
I Pertiche 172:-:6   40   4264225    22680
              406     2642           0000
              4125    20625
                       0000
```

```
                  ₤ 14391759:7:6      Tav.e 12691:-:10:6      Pert.e 172:-:6
      720            7191              ₤ 1134:-               Pert.e 73:4:6
  62    N ₤ 19988:11:1⅛  7117           50764                    516
P ₰ 3223:5:19:1⅛ 138   6375              38073                  1204
          148          6159            139601                     86
           245          399                141:15                  28:4
            59           20                 15:15                  14:2
                       7980                  7:17:6                 6:-:10:6
                        787        M ₤ 14391759:7:6     K Tav.e 12691:-:10:6
                         67
                         12
                        810
                         90
```

Non bisogna tralasciar di far le prove, che potranno servire di esercizio per chi desidera di approfittarne. Moltiplicate le dimensioni ritrovate fra di se producono l'area K *di tutto il terreno espressa in tavole, e moltiplicate le tavole dalla stima dei Ducati ridotta a Lire superiormente alla lettera* L, *fa il prodotto* M. *Questo prodotto ha da esser diviso dal 720 costituente l'unità del campo, e nel quoziente* N *risulta in lire il prezzo di tutta la campagna; il qual prezzo per fine ridotto in Ducati, mostrandosi fino all'ultima minuzia lo stesso, che si dà nel Problema, comprova per legittima in tutto la risoluzione fatta per trovare le due proposte dimensioni.*

Scolio I. *Stando fermo il terzo termine dell'analogia nominata di sopra, e invertendo li primi due, cioè*

facendo $m:n :: \frac{cp}{s} : \frac{cnp}{ms}$, la radice quadrata dell'ultimo, cioè $\sqrt{\frac{cnp}{ms}}$ esprime l'altra dimensione richiesta, per cui, volendovi applicare i numeri, si debba al contrario moltiplicar per 3 il numero C, e per 7 il numero A; cosicchè ribassati li due prodotti Q R mediante il massimo divisor comune S, si trovi la frazione T, che ha numeri quadrati l'uno e l'altro termine. La radice del denominator è 4; e V cioè 295 è la radice del numeratore; e divisa la seconda per la prima, si trova nel quoziente X la dimension minore, cioè la larghezza della campagna in pertiche 73, piedi 4, oncie 6 come prima.

A 217728
7
R 1524096
571536
00000

C 2763217800
3
Q 8289653400
6691734
5953500
13812120
S 95256
T $\frac{87025}{16}$

8289653400
669173
238140
476280
00000

1524096
571536
00000

87025
470
2925
000
2
49 V
585

X Pertich. $\frac{295}{4}$ 73:4:6

Scolio II. Maneggiando sotto altra idea le date quantità, si troverà un eguale coincidenza con la soluzione passata, cioè appoggiandone il fondamento alla Propoiz.e 20 del Lib.o 6, dalla quale si apprende, che le figure piane simili hanno fra di se la ragione duplicata dei loro lati omologhi, ovvero che la figura alla figura simile ha la ragione del quadrato d'un suo lato al quadrato dell'omologo nell'altra; e quindi procedendo aritmeticamente, allorchè io abbia ridotta la quantità della campagna sotto la figura della frazione $\frac{C}{A}$, fo il prodotto 21 dei due termini della data ragione 7:3, cioè di quella che i lati devono avere fra di se; e tale prodotto mi rappresenta una figura simile a quella della campagna; e perciò lo stabilisco per primo termine d'una analogia. Fo il quadrato d'uno de' termini della ragione, qual voglio; poniamo il secondo 3, il cui quadrato è 9; e il terzo termine è la quantità della campagna cioè la fraz.e $\frac{2763217800}{217728}$, onde uscir debba nel quarto il quadrato della seconda dimensione di ena campagna, voglio dire la larghezza. Di fatto moltiplicando il secondo col terzo termine trovo il prodotto Y, che diviso dal primo 21 (che per esser piccolo si può far la division a mente senza scriverlo), trovo per quadrato della detta larghezza la fraz.e $\frac{1184236200}{217728}$; li di cui termini hanno per massimo comune divisore il numero Z e però con esso ridotti minimi in a, cadaun di loro è un quadrato; senonchè osservandosi, che a e la frazione stessa T ritrovata superiormente, è manifesta la verità della soluzione; poichè estratta la quadrata radice, si offre subito $\frac{295}{4}$ a cui rispondono le pert.e 73:4:6.

2763217800
9
Y 24868960200
1184236200
955962
850500
1973160
Z --- 13608

217728
81648
0000

217728
81648
0000

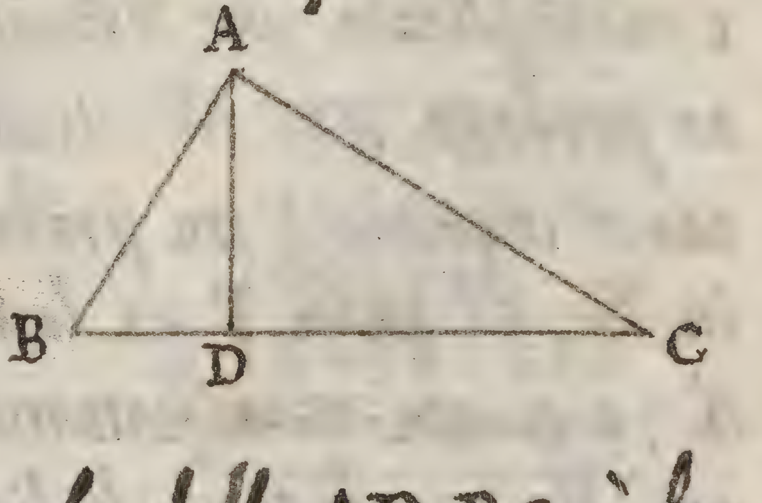
13608
a $\frac{87025}{16}$

1184236200
95596
034020
68040
0000

Analiticamente il primo termine dell'analogia è mn, il secondo n^2, il terzo l'estension della campagna ritrovata di sopra, cioè $\frac{cp}{s}$, cosicchè il quarto termine sia $\frac{cn^2p}{mns} = \frac{cnp}{ms}$, e conseguentemente in lettere si ottenga nè più nè meno $\sqrt{\frac{cnp}{ms}}$, come da principio, per valore d'una delle dimensioni richieste.

Teorema, che manifesta una delle molte proprietà de' triangoli rettangoli.

D'ogni triangolo rettangolo li due cateti presi insieme sono medj proporzionali fra l'ipotenusa e quello che si compone dall'ipotenusa e dal doppio della perpendicolare su l'ipotenusa.



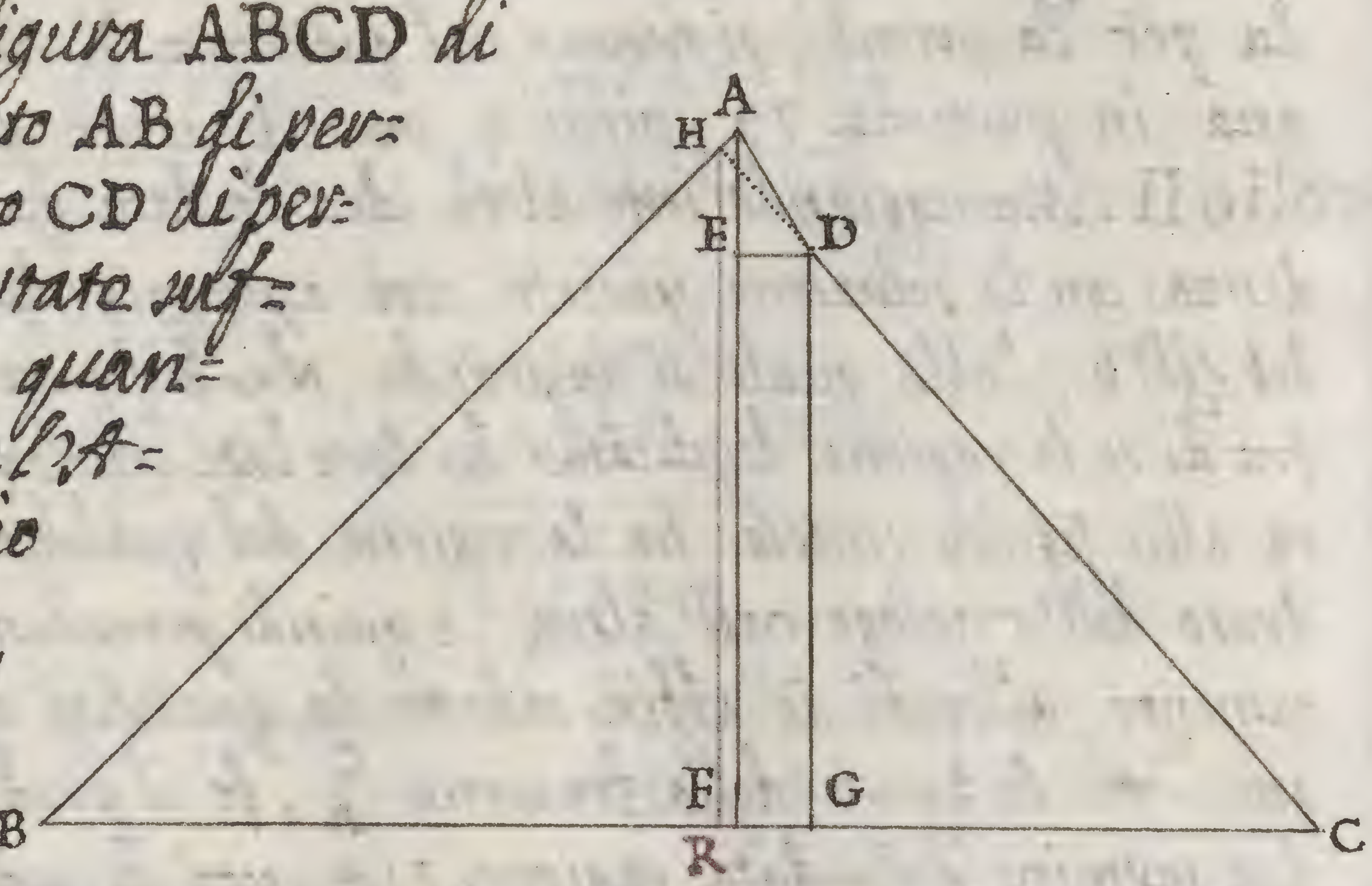
Sia il triangolo rettangolo ABC, che abbia l'angolo BAC retto, da cui cada su l'ipotenusa BC la perpendicolare AD: dico, che li due cateti BA AC presi insieme sono proporzionali di mezzo tra la BC e quello, che si compone dalla BC e dal doppio della AD.

Imperciocchè essendo retto l'angolo BAC, sarà (per la 41 del 1) il rettangolo delle BA AC doppio del triangolo ABC. Per la stessa ragione il rettangolo delle AD BC è doppio dello stesso triangolo ABC; e perciò quello che si fa due volte dalle BA AC è uguale a quello, che si fa dalla BC e dal doppio della AD. Oltre a ciò essendo li due quadrati delle BA AC uguali al quadrato della BC: saranno li quadrati delle BA AC insieme con quello, che si fa due volte dalle BA AC uguali al quadrato della BC, e a quello che si fa dalla BC e dal doppio della AD; ma li quadrati delle BA AC insieme con quello, che si fa due volte dalle BA AC sono uguali al quadrato, che si fa dalle BA AC prese insieme (per la 4 del 2); ed il quadrato della BC con quello, che si fa dalla BC e dal doppio della AD, è uguale al rettangolo, che si fa dalla BC, e da quello, che si com=

pone dalla BC e dal doppio della AD (per la 3 del 2): dunque il quadrato delle BA AC prese insieme è uguale al rettangolo, che si fa dalla BC, e da quello che si compone dalla BC e dal doppio della AD; laonde (per la 17 del 6) sarà come la BC a quello che si compone dalle BA AC prese insieme, così le BA AC prese insieme a quello che si compone dalla BC e dal doppio della AD. Dunque li due cateti BA AC presi insieme sono proporzionali di mezzo fra la BC, e quello che si compone dalla BC e dal doppio della AD; e però d'ogni triangolo rettangolo li due cateti presi insieme sono proporzionali di mezzo fra l'ipotenusa, e quello che si compone dall'ipotenusa, e dal doppio della perpendicolare, che dall'angolo retto cade su l'ipotenusa medesima; il si dov.^a dim.^o

---

Problema di Agrimensura. *È stata misurata la figura ABCD di un terreno con qualche avvertenza; poichè tolto il lato AB di pertiche 286:1:1; il lato BC di pert.^e 371:5:1; il lato CD di pertiche 221:3:1: queste tre misure non sarebbono state sufficienti per determinare l'area del terreno, anche quando si fosse tolta la quarta misura del lato AD, se l'Agrimensore non avesse conosciuto, ch'era necessario il misurare ancora le due perpendicolari AF DG, la prima delle quali è pert.^e 199:3, e l'altra pert.^e 165:1:7; con le quali pretende inoltre, che dir si possa, quanto sia il lato AD senza misurarlo; per il che adunque bisogna ora esaminare se realmente sia possibile con le misure date far il calcolo del terreno e trovar la quantità del quarto lato AD.*



E per verità chiamando alla memoria la propos.^e 47 del lib. p.^mo degli Elem., si scopre tutta la facilità, non che la possibilità di risolvere il Problema; ma sarà non poco lungo nell'operare; avvegnachè la formazion de' quadrati, l'estrazion delle radici, e le moltiplicazioni delle misure, che non sono meno di tre paja, occuperanno la mente per lo spazio di qualche ora. Fatti pertanto li due quadrati dello ~~ipotenusa~~ lato AB, e della perpendicolare AF, e sottratto questo da quello, resterà il quadrato del segamento BF; da cui estratta la radice, si troverà, che BF è pert.^e 205:1:1. Similmente dall'altra parte della figura facendo lo stesso, si troverà, che il segamento CG è pertiche 147:3. Uniti insieme li valori di questi due segamenti, e sottratta la summa da tutto il lato BC, lascierà pert.^e 19:1 per valore del segamento di mezzo FG, che è base del trapezio AFGD.

Moltiplicando BF per AF, uscirà il prodotto I; moltiplicando CG per DG, ne verrà il prodotto K; e facendo la summa L delle due perpendicolari AF DG, e moltiplicata per FG, il terzo prodotto sarà M. Si uniscano insieme li tre prodotti in N, de' quali P sia la metà; e questa manifestamente

```
BF  Pert.e 205:1:1
AF  Pert.e 199:3
    ---------------
      1845
     1845
     205
        102:3
         33:1:6
          2:4:7:6
    ---------------
I Tav.e 40933:3:1:6
        24376:2:6:6
         6991:1:10:2
    ---------------
N   72301:1:6:2
P   36150:3:9:1
              6
    ---------------
Tav.e 36150:22:6:6
        150
         00
```

```
DG  Pert.e 165:1:7
CG  Pert.e 147:3
    ---------------
      1155
     2310
        82:3
        24:3:6
        12:1:9
         2:-:3:6
    ---------------
K Tav.e 24376:2:6:6

Q 720:30
    ---------------
Camp. 50:5:-:22:6:6
```

```
AF  Per.e 199:3
DG  Per.e 165:1:7
    ---------------
L   Per.e 364:4:7
FG  Pert.e 19:1
    ---------------
      3276
      364
        60:4
         9:3:6
         3:1:2
         1:3:7
         -:1:7:2
    ---------------
M Tav.e 6991:1:10:2
```

sarà l'area di tutta la figura ABCD del terreno, avvegnachè sia costituita dai due triangoli ABF DCG, e dal trapezio AFGD di due lati paralleli; e le misure siano state moltiplicate per intiero fra di se senza prenderne le metà, com' insegna la pratica. La quantità dunque del terreno espressa in P sotto la denominazione di tavole, e divisa per 720 in Q giunge a campi 50, vanazze 5, tavole 0, piedi 22, oncie 6, punti 6.

In ordine poi a determinare la misura del lato AD: allorchè si sottragga la perpendicolare minore DG dalla perpendicolare maggiore AF, si fa il quadrato della restante EA, cioè di pert.^e 34:1:5, e sommato col quadrato della FG, cioè di pert.^e 19:1 si avrà il quadrato del lato AD; cosicchè estratta la radice, si trovino pert.^e 39:1:5 per valor preciso del medesimo. Nella seguente figura si leggono le misure d'ogni linea, che interviene in questo Problema.

Problema II. *Poste le cose medesime, si propone di ritrovare il punto H, ove prolungate concorrono le due rette BA CD.*

AB Pert.ᵉ	286 : 1 : 1
BC Pert.ᵉ	371 : 5 : 1
CD Pert.ᵉ	221 : 3 : 1
AF Pert.ᵉ	199 : 3 : –
DG Pert.ᵉ	165 : 1 : 7
BF Pert.ᵉ	205 : 1 : 1
CG Pert.ᵉ	147 : 3 : –
FG Pert.ᵉ	19 : 1 : –
EA Pert.ᵉ	34 : 1 : 5
AD Pert.ᵉ	39 : 1 : 5

BF = a = onc.ᵉ 14773
AF = b = onc.ᵉ 14364
BC = c = onc.ᵉ 26773
CG = m = onc.ᵉ 10620
DG = n = onc.ᵉ 11899
AB = q = onc.ᵉ 20605

$a = 14773$
$n = 11899$
132957
132957
118184
162503
$an = 175783927$

$b = 14364$
$m = 10620$
287280
86184
14364
$bm = 152545680$
$an = 175783927$
$an+bm = 328329607$

$$\frac{cnq}{an+bm} = \text{BH} = \text{onc.}^{e}\ 19992\ \tfrac{209052691}{328329607}$$
pied. 1666 : –
pert.ᵉ 277 : 4
AB = pert.ᵉ 286 : 1 : 1
HA = pertiche 8 : 3 : 0 $\tfrac{119276906}{328329607}$

$c = 26773$
$n = 11899$
240957
240957
214184
294503
$cn = 318571927$
$q = 20605$
1592859635
1911431562
637143854
$cnq = 6564174555835$
3280878485
3259120228
3041537653
865711905
209052691

Dal punto H si tiri la HR ~~per~~ *perpendicolare alla BC; e le tre rette lineé HR AF DG saranno fra di se parallele. Si faccia* BF = a; AF = b; BC = c; CG = m; DG = n; AB = q; BR = x; *e sarà* CR = $c-x$. *Per la somiglianza de' triangoli* ABF HBR *sarà* BF : FA :: BR : RH, *cioè* $a : b :: x : \frac{bx}{a}$. *Per la stessa ragione essendo simili fra loro li due triangoli* DGC HRC, *sarà* CG : GD :: CR : RH, *cioè* $m : n :: c-x : \frac{cn-nx}{m}$, *onde abbiansi le equazioni* $\frac{bx}{a} = \frac{cn-nx}{m}$; $bmx = acn - anx$; $anx + bmx = acn$; *e si conchiuda* $x = \frac{acn}{an+bm}$ = BR. *Di nuovo essendo* FB : BA :: RB : BH, *sarà* $a : q :: \frac{acn}{an+bm} : \frac{cnq}{an+bm}$; *e perciò ridotto a numeri il quarto termine secondo le* ~~operazioni~~ *dimensioni superiormente descritte, si troverà* BH *esser pert.ᵉ* 277, *pied.* 4, *onc.* 0 $\frac{209052691}{328329607}$; *e conseguentemente* HA *esser pert.ᵉ* 8, *pied.* 3, *onc.* 0 $\frac{119276906}{328329607}$, *come per aver il punto del concorso delle due rette* BA CD *si dovea fare.*

Scolio. *Nel Grand-Albero il triangolo rettangolo* AFB = $\frac{14364 : 14773}{20605}$ *si trova alla pagina* Ab; *l'altro* CGD = $\frac{10620 : 11899}{15949}$ *alla pagina prossima* Ac. *Quello ha* 133 : 54 *per generatori, e questo* 118 : 45. *Il terzo triangolo* DEA = $\frac{1380 : 2465}{2825}$ *è quintuplo nei lati del triangolo rettangolo* $\frac{276 : 493}{565}$, *che si trova nella stessa pagina* Ac, *ed ha per generatori li due numeri* 23 : 6.

Problema II. *Per sapere la tenuta d'una Cassa fatta di tavole grosse oncie 1, e punti 11, per inavvertenza sono state prese le sue misure esternamente; e vien riferito, che è lunga piedi 7 : 9 : 5; larga piedi 6 : 0 : 3; alta piedi 4 : 8 : 10. E comecchè un piede cubico per esperienza fatta tiene un minale, e mezzo quarterolo di grano; e che un sacco di riso equivale a libbre 288: si dimanda, quanti pesi di riso da libbre 25 può contenere la Cassa.*

Tutto il difficile, che può avere questo conteggio, si riduce in togliere alle misure esterne della Cassa l'eccesso, in cui avanzano le misure di dentro, le quali sono le sole operative per conseguire la precisa tenuta di riso, come ognuno può da se conoscere chiaramente; e però a tale effetto convien considerare, di quanto debbansi quelle diminuire, avuto riguardo, che la Cassa ha quattro sponde e un fondo solo, e che ognuna di queste cose ha la grossezza di oncie 1, e punti 11. Per la qual cosa apparisce tosto, che la lunghezza e la larghezza esigono una diminuzione del doppio di tale grossezza, quandochè una sola grossezza si ha da togliere all'altezza. Dunque dalla lunghezza dde piedi 7 : 9 : 5 levando oncie 3, punti 10, resteranno piedi 7 : 5 : 7; e la larghezza di piedi 6 : 0 : 3 diverrà piedi 5 : 8 : 5. L'altezza poi di piedi 4 : 8 : 10 diminuita di oncie 1, punti 11 sarà mutata in piedi 4 : 6 : 11; cosicchè fatta più speditamente per aritmetica dodicadica la moltiplicazione di queste tre misure così ridotte, si trovi il prodotto A *(in decadica piedi cubici 194 : 9 : 4 : 7 : 10 : 5 : 1 con frazioni duodecimali sino alle seste). Il minale col mezzo quarterolo si uguaglia a quarteroli* $\frac{33}{2}$, *che in aritmetica dodicadica divengono* $\frac{29}{2}$; *e perciò fatta la moltiplicazione del prodotto* A *per* $\frac{29}{2}$, *si avrà il secondo prodotto* B, *ch' esprime tanti mezzi quarteroli; ma ogni mezzo quarterolo equivale a libbre 3, cioè a oncie 36, che in dodicad. ha la figura di 30: dunque mol=*

757
585
313u
4u88
313u
3668uu
46u
33022u1
19345u6
1222uu8
A 1429476e51
29
1021056e999
28569386e2
B 3877997u9
30
C u1eus4euu30
86
6u
8

21
D 543
64
E 771

tiplicando per questa figura il secondo prodotto B, nel terzo C si avrà il numero preciso delle oncie, che avrà di peso tutto il riso, che può essere contenuto nella Cassa. Separando poi dal prodotto C le sei ultime note 4ЄUU30 per le frazioni duodecimali d'un oncia, e dividendo le restanti per 12, cioè per la figura 10 (il che è il medesimo, che tagliare l'ultima nota 5): si avranno espresse in dodicadica libbre U1ЄU, e oncie 5; le quali divise per 25, cioè per la figura 21, onde conseguir il numero de' pesi richiesti dal Problema: si avrà il quoziente D, che trasportato in aritmetica decadica, come si vede in E, risolve la dimanda in pesi 771, libbre 8, oncie 5, e duodecimali 4:10:11:11:3 con una facilità mirabile in tutte le operazioni fatte, mediante l'uso dell'Aritmetica di dodici caratteri.

Scolio I. *Se alcuno volesse conoscere la quantità de sacchi di riso, che può contenere la Cassa: basta ripigliare il prodotto B; e siccome 48 quarteroli costituiscono la misura d'un sacco, cioè mezzi quarteroli 96, che in dodicadica si esprimono per la figura 80: si divida per questa il prodotto B, e comparirà il quoziente F; nella di cui prima duodecimale veggendosi la nota U, che conchiude minali 2, e quarte 3: nell'aritmetica di dieci caratteri si rilevano sacchi 66, minali 2, quarte 3, e duodecimali di quarta 5:8:8:5:5 $\frac{31}{32}$.*

```
   80          3877.9977U9
F 56.U58855 79/80   477
sacc. 66:2:3         77.9
                      3.99
                       597
                       577
                        37U
                        3U9
                         79
```

Fenomeno aritmetico I. *Il nostro spirito assuefatto a conoscere una cosa sotto l'apparenza d'un'immagine; se vuole, che la stessa immagine debba rappresentarne un'altra diversa da quella: al comparirgli davanti la detta immagine può benissimo ravvisar in essa la seconda cosa rappresentata senza punto confonderla con la prima; ma se preventivamente non abbia avvertito, che alla prima convengono alcune proprietà, che disconvengono alla seconda: è facile, che sia colto in errore formando alcuni giudizj. Nelle operazioni fatte superiormente è nato un fenomeno, che di ciò ch'ho detto, mostra un esempio. Il fenomeno consiste nella frazione $\frac{79}{80}$ in fine del quoziente F; di cui lo spirito occupato nel maneggio dell'aritmetica di dodici caratteri sa benissimo, che non significa settantanove ottantesime d'una duodecimale sesta; ma colto dall'apparenza, o sia dall'immagine, che rappresentano li due termini, che sembrano differire dell'unità solamente, gli giudica fra di se primi, e che la frazione sia non solo espressa in termini minimi, ma ancora la più prossima tra quelle che hanno per denominatore la figura 80 a costituir una sesta duodecimale; quando per l'opposto il fatto è, che la frazione $\frac{79}{80}$ è distante per due altre frazioni, se ha da giugnere all'ultima approssimazione ora detta; e queste sono $\frac{7Є}{80}$, $\frac{7U}{80}$, la seconda delle quali è veramente l'ultima. Dunque li termini della frazione $\frac{79}{80}$ non sono fra se differenti d'una sola unità, come appajono a prima vista; e però convien esaminare, se abbiano alcun numero per divisor comune, onde poterli ribassare, se fia possibile. Perchè poi è manifesto, che se un termine è pari, l'altro è dispari: si conosce ugualmente, ch'è inutile il tentare il 2, e ogn'altro numero pari. Dunque dei numeri dispari si esamini prima il 3; e dividendo per 3 la figura del numerator 79: il 3 nel 7 si racchiude per 2 con avanzo dell'unità, che sublimata, in dodicadica equivale a 12; e il 12 unito col valore della seguente nota 9 ascende alla summa di ventuno, in cui si racchiude per 7 il divisor 3: dunque il numerator è divisibile dal 3, e può comparire sotto la figura 27. Si faccia lo stesso della figura del denominator 80; e si troverà, che il 3 nell'8 si racchide per 2 con l'avanzo di due unità, che sublimate divengono ventiquattro, a cui nulla dovendosi aggiungere, perchè dopo il carattere 8 vi è il carattere 0: la summa è tuttavia ventiquattro, in cui si contiene il 3 per 8. Dunque eziandio il denominatore è divisibile dal 3, e può comparire sotto la figura 28; e in tal modo la figura $\frac{79}{80}$ può ridursi alla figura $\frac{27}{28}$; in cui li due termini differiscono realmente dell'unità, e che perciò essa è la più prossima ad una sesta ~~[illegible]~~ duodecimale fra tutte quelle, che hanno il medesimo denominator 28. Trasportata la figura $\frac{27}{28}$ in aritmetica decadica, si converte in $\frac{31}{32}$ d'una duodecimale sesta, ed è in coerenza anche la sua più prossima tra quelle, che hanno il denominator 32 per la ragione stessa, che li due termini 31 32 differiscono essi pure della sola unità; cosicchè appaja manifestamente, come ogn'intelletto potrebbe esser colto in errore, quando avvengono fenomeni di questa sorte per occasione di rappresentare cose diverse sotto l'apparenza d'una stessa immagine.*

Fenomeno aritmetico II. *Ho detto superiormente esser cosa manifesta, che se della figura $\frac{79}{80}$ un termine è pari, l'altro è dispari; e ciò sul fondamento, che in ogni aritmetica di qualunque denominazione si voglia, quando siano dati due numeri, espressi con carattari aritmetici, uno de' quali*

finisca con un carattere dispari, e l'altro con un carattere pari, si può sempre affermare, che di es= si uno è pari e l'altro dispari senz'alcun dubbio; ma non bisogna però determinare, qual sia l'uno, e qual sia l'altro; avvegnachè il numero, che finisce col carattere dispari, non è sempre dispari, e quel= lo che finisce con carattere pari, non è pari tutte le volte. Si è veduto, che in aritmetica di dodici ca= ratteri la figura $\frac{79}{80}$ è la stessa, che è nella comune aritmetica la frazione $\frac{31}{32}$, nella quale perchè il numerator 31 finisce nel carattere dispari 1, è realmente dispari; e realmente è pari il denomi= nator 32, perchè finisce nel carattere pari 2. Ma se questa stessa frazione $\frac{31}{32}$ si voglia espri= mere sotto un aritmetica di nove caratteri; comechè la figura, che n'esce, è $\frac{34}{35}$: si vede nascer= re tutto l'opposto, perchè il numeratore 34, ch'è dispari, finisce nel carattere pari 4; e il denomi= natore 35, ch'è pari, termina col carattere dispari 5; altro fenomeno di qualche osservazione, do= perchè potrebbe indurre in un falso giudizio circa la qualità de' numeri qualunque intelletto, che non ne fosse prevenuto.

Scolio II. Tutte le operazioni, che sono state eseguite dopo fat= ta la riduzione delle date mi= sure esterne della Cassa, e con le quali si è ottenuta la ca= pacità della medesima, come ha ordinato il Problema, sono state replicate col metodo stesso intorno alle misure intiere, come sono state proposte da principio, per solo desiderio di vedere, quanti pesi di riso fosse valevole a contenere lo spazio occupato dalle tavole, che costituiscono la Cassa; di modo che le lettere minuscole del medesimo nome riscontrate con le majuscole mostrano le operazioni simili; e pe= rò alla lettera a si vede il prodotto delle tre dimensioni; alla lettera b il prodotto secondo, ch'esprime li mezzi quarteroli; il terzo prodotto alla lettera c, che deter= mina il numero delle oncie; alla lettera d il quo= ziente de' pesi in dodicadica, e in decadica alla lettera e; e finalmente alla lettera f il numero de' sacchi di riso. Perchè dunque da questa replica di ope= razioni si dia soddisfazione a ciò, che si desidera vedere, bisogna fare li necessarj confronti dei risul= tati delle prime con quei delle seconde; e ambedue questi si veggono alle lettere G H; alla prima delle quali si conosce, che nello spazio occupato dalle tavole della Cassa possono racchiudersi pesi di ri= so 107, libbre 17, oncie 11, e duodecimali 6:6:2:8:3, e alla seconda sacchi di riso 9, minali 1, quar= te 0, e duodecimali 2:5:6:3:1 $\frac{11}{32}$ in aritmetica comune.

```
        80
f   64.382587 26/80
Sacc. 76:-:3.82587 10/32
Sacc. 66:2:3.58855 31/32
H Sacchi 9:1:-.25931 11/32

4265.57986
 2ε5
  25.5
   5.57
    179
    398
     58ε
      4ε6
       26

             795
             603
        [illegible]
            1u43
          3ε86
I       3εε543
           48ε
        3308566
       2721u6ε0
      1375950
a     165u98366
             29
     11ε5ε327ε6
     30uu74710
b    42ε557986
            30
c   108744.u52760
         27
          64
           1

   21
d 613
   73
e Pesi 879:1:4.11.5.2.7.6
E Pesi 771:8:5.4.10.11.11.3
G Pesi 107:17:11:6.6.2.8.3
```

Scolio III. Ma un altro confronto rimane da farsi, che non si deve tralasciare, dopochè è instruttivo nella sua esecuzione: voglio dire, che siccome facendo il calcolo delle sponde, e del fondo, si ottiene la solidità del legno, che forma la Cassa; e che nè più nè meno si conseguisce la solidi= tà medesima facendo la sottrazione del prodotto A dal prodotto a: così la differenza di questi due prodotti dovrà uguagliarsi necessariamente al pro= dotto, che uscirà dal calcolo mentovato. La differenza si vede in K; e il cal= colo, che in questo incontro è veramente di buona instruzione, si eseguisce con la maggior brevità, unendo primieramente insieme quattro misure, cioè due lun= ghezze, e due larghezze, vale a dire una esterna e l'altra interna di ambedue, come si è fatto in L, e poi trasportando la summa in aritmetica dodicadica, come apparisce in M, onde si abbia un intero pe= rimetro lineare di mezzo delle sponde; il quale secondariamente moltiplicato dall'altezza della Cassa senza il fondo, esibisce nel prodotto N un medio superficiale perimetro delle medesime. A questo ag=

```
a 165u98366
A 14294ε7ε51
K  23250515

Lungh.a ester. Pied. 7:9:5
Lungh.a inter. Pied. 7:5:7
Largh.a ester. Pied. 6:0:3
Largh.a inter. Pied. 5:8:5
L ----- Summa Pied. 26:11:8
M In dodicadica Pied. 22:u:8

    22u8
     46u
   20884
  1156ε0
  8uε8
N ε35284
O 3εε543
P 1223807
Q ------1u
 11014465
 1223807
R 23250515
```

giungendo in terzo luogo la superficie intiera O del fondo, il calcolo della quale senza farlo di nuovo si trova fatto nello Scolio antecedente alla lettera I: si avrà la summa P; e finalmente moltiplicata questa summa per la grossezza Q della Cassa, si conseguisce nel prodotto R la solidità del legno, che la costituisce. Perchè poi questo prodotto R paragonato con la differenza K ritrovata in prima, è con essa in perfetta uguaglianza: si vede apertamente, che ancora questo confronto per buon esercizio instruttivo meritava d'esser fatto.

Problema di Agricoltura. *Divisamento I.*

Una valle (non compreso l'argine, che la circonda) è lunga pertiche 440; larga pert.e 84; è il più, che dall'acqua resti inondato, e sino all'altezza di oncie 3. Per ricuperarla a qualche uso, come sarebbe di pascolo, e di pescagione, pensa il padron di ridurla in 22 prese uguali con far escavare di traverso fosse 21 con la medesima distanza fra di se e dagli argini di testa; le quali siano profonde piedi 3, e niente più riguardo alla sussistenza delle rive. Pensa inoltre che facendo il compúto della terra, che sarà trasportata sul piano restante della valle; e dell'acqua, che sarà nella cavità delle fosse raccolta debba nascere un tale compenso, che rimangano indispensabilmente in secco oncie 6 di terreno. Egli dunque vorrebbe sapere secondo questo suo divisamento, quanta sia per essere la larghezza delle fosse, onde metter mano al lavoro, quando non sia sproporzionata.

La risoluzione di questo Problema si riduce a fare, che l'altezza dell'aqua nelle fosse con oncie 6 di terra più alta della sua superficie si uguagli all'altezza della terra trasportata sul piano restante della valle con oncie 36 assegnate alla profondità delle fosse. Per la qual cosa a fine di agevolar il calcolo siano tradotte in oncie ambedue le dimensioni della valle, cioè la lunghezza oncie 31680 $= a$; la larghezza oncie 6048 $= b$; la profondità delle fosse oncie 36 $= c$; l'altezza dell'inondazione onc.e 3 $= m$; l'altezza del terreno in secco oncie 6 $= n$; e x l'aggregato di tutte insieme le larghezze 21 delle fosse. Sarà dunque bcx il terreno, che uscirà da tutta l'escavazione; abm uguaglierà tutto il corpo d'acqua, che inonda la valle; e quindi l'altezza dell'acqua nelle fosse sarà $\frac{abm}{bx} = \frac{am}{x}$. Siccome poi la lunghezza del terreno in secco ha da esser minore di quella della valle, per quanto comportano tutte insieme le larghezze delle fosse: questa lunghezza diminuita sarà $a - x$, che moltiplicata per la larghezza b darà di superficie $ab - bx$; su di cui distribuita con altezza eguale da per tutto la terra bcx, che uscirà dalle fosse: sarà di altezza $\frac{bcx}{ab-bx} = \frac{cx}{a-x}$. Ma si è detto a principio, che l'altezza dell'acqua nelle fosse con oncie 6 di terra più alta della sua superficie ha da uguagliare l'altezza della terra trasportata sul piano restante della valle con oncie 36 assegnate alla profondità delle fosse: dunque si avrà l'equazione $\frac{am}{x} + n = \frac{cx}{a-x} + c$, che levando le frazioni diventa $a^2m - amx + anx - nx^2 = cx^2 + acx - cx^2$; e poi ordinando si trova $a^2m = nx^2 + acx + amx - anx$. Si divida per n, e si faccia $c + m - n = u$, per cui sia $ac + am - an = au$; e l'equazione sarà $\frac{a^2m}{n} = x^2 + \frac{au}{n}x$; e compiendo il quadrato, si avrà $\frac{4a^2mn + a^2u^2}{4n^2} = x^2 + \frac{au}{n}x + \frac{a^2u^2}{n^2}$; e risolvendo si conchiuda $x = \frac{a(-u + \sqrt{4mn + u^2})}{2n}$.

Lung.za Pert.e	440
	72
	880
	3080
Onc.e	31680 $= a$
Larg.za Pert.e	84
	72
	168
	588
Onc.e	6048 $= b$
Onc.e	36 $= c$
Onc.e	3 $= m$
Onc.e	6 $= n$

Si faccia l'applicazion de' numeri $\frac{31680(-33 + \sqrt{72 + 1089})}{12}$; e cavando la radice, sarà essa oncie $34\frac{5}{69}$, come apparisce dalla operazione A; e tolto da quella il 33 negativo, resterà $1\frac{5}{69}$ da moltiplicarsi col 31680 per aver il prodotto B da dividersi per 12, e conseguir nel quoziente C tutta in aggregato espressa in oncie la larghezza delle fosse; e però di nuovo diviso per 12 il quoziente C, la stessa larghezza in D compa=

```
       1089
         72            31680                    31680       Piedi  21        Pied. 235:11:4
       ----              1 5/69     69              5              ------ 19/21     25
       1161           --------     ----        158400              11:2:9             4
  3     261             31680      2295          204                                 12
 64       5              2296                    660        E                      ----
        A             --------                   390                                 59
                    B  33976                      45                                 17
                    C  2831:4                                                        12
                    D  235:11:4                                                     ----
                                                                                    208
                                                                                     19
```

rirà espressa in piedi 235, oncie 11, punti 4; i quali ripartiti per 21, assegnano ad ogni fossa la larghezza E di piedi 11, oncie 2 e punti 10 prossimamente, come si dovea fare.

Prova. *Si è veduto nella risoluzione fatta per simboli, che è svanita la lettera b dinotante non meno la larghezza della valle che la lunghezza delle fosse trasversali, segno manifesto, che questa misura non facendovi alcuna funzione, è del tutto inutile; e perciò nemmeno è necessaria nella prova. Quindi sarà sufficiente il moltiplicare li piedi 235:11:4 per la profondità delle fosse piedi 3, che daranno il prodotto superficiale F di piedi 707, oncie 10 da dividersi per piedi lineari 2404:–:8, che sono la differenza G della lunghezza della valle scemata della larghezza delle fosse; e fatta la divisione I (trascurando la frazione dei punti 8, che non conta) si vedrà nel quoziente H l'altezza, che produrrà la terra distribuita sul restante piano della valle, cioè onc.ᵉ 3, pun.ⁱ $6\frac{2}{5}$ prossimamente.*

2640
235:11:4
G 2404:–:8
H 3:6 $\frac{240}{601}$

235:11:4
3
F 707:10:–
12
8494
I 1282
12
15384
960

Andando avanti convien cercare l'altezza dell'acqua ridotta nella cavità delle fosse; per conseguir la quale basta moltiplicar tutta la lunghezza della valle piedi 2640 per le oncie 3 altezza dell'inondazione, per cui verrà altro prodotto superficiale di piedi 660 da dividersi per la larghezza delle fosse piedi lineari 236 (computando per piedi 1 le oncie 11, e punti 4); e fatta la divisione K, comparirà l'altezza dell'acqua L, cioè piedi 2, oncie 9, punti $6\frac{3}{5}$; da cui si ritrae in M, che è minore delli 3 piedi profondità assegnata alle fosse, di oncie 2, punti $5\frac{2}{5}$ sotto il piano della valle. Per la qual cosa unita in N questa riva di terreno saldo che sorvanza la superficie dell'acqua, con l'altezza della terra trasportata sul piano: si trovino oncie 5, punti $11\frac{4}{5}$, cioè assai prossimamente le oncie 6 di altezza in secco, che il padrone della valle richiede secondo il suo divisamento.

236
L 2:9:$6\frac{3}{5}$
3
M onc.ᵉ 2:5 $\frac{2}{5}$
3:6 $\frac{2}{5}$
N Onc.ᵉ 5:11 $\frac{4}{5}$

660
K 188
12
2256
132
12
1584
168
5
840
132

Divisamento II. *Dai piedi 11, oncie 2, punti 10, che la soluzione del Problema antecedente assegna di larghezza a cadauna fossa, veggendo il padrone, che sarebbe cosa sproporzionata il farla maggiore per cavar terra di più da inalzar sopra le oncie 6 il piano della valle, contando dalla superficie dell'acqua: un nuovo divisamento gli suggerisce di proporre il seguente*

Problema II. *Poste le cose medesime, intersecando le fosse transversali con escavare tre fosse di mezzo per il lungo della valle, le quali abbiano uguale distanza fra di se e dagli argini laterali, la medesima larghezza di piedi 11:2:10, e la stessa profondità di piedi 3 come le altre, cosicchè la valle venga divisa in 88 prese tutte uguali; e finalmente trasportando la terra sopra il restante piano di detta valle: si dimanda, a quanto arriverà l'alzamento del terreno in secco sopra la superficie dell'acqua.*

La lunghezza di piedi 504, comune ad ogni fossa trasversale, e ad ambedue gli argini di testa, si moltiplica per l'aggregato di tutte le larghezze unite di piedi 235:11:4, onde produca in O piedi 118916, cioè il piano del loro fondo. Si uniscono ancora insieme le larghezze uguali delle tre fosse, onde si abbia un simile aggregato in piedi 33, onc.ᵉ 8, pun. 10; ma la lunghezza delle medesime, abbenchè sia quella della valle; perchè però non convien prender due volte la larghezza delle trasversali: ha da esser quella ritrovata superiormente in G, cioè pied. 2404:–:8;

504
235:11:4
2520
1512
1008
252
126
84
14
O 118916
81104
Q Pie. 20002|0
S Pied. 1:7:11

2404:–:8
33:8:10
7212
7212
1202
400:8
133:6:8
33:4:8
1:10:5:10:8
P 81103:5:9:10:8

5:7:5:8
1:10:5:10:8

504
660
30240
3024
R 33264|0
13262
12
159144
19130
12
229560
29540
9538

che si moltiplica per li piedi 33:8:10, come si è fatto in P, onde avere altro piano di fondo, cioè quello delle tre fosse da unirsi al primo in Q. Si prenda poi il prodotto di piedi 660 derivato dalla moltiplicazione di tutta la lunghezza della valle pied. 2640 nelle onc.ᵉ 3 altezza dell'inondazione; e di nuovo si moltiplica per esso li pied. 504 larghezza della valle medesima, perchè si abbia in R la quantità dell'acqua, che deve ridursi nelle fosse; e fatta la divisione di R per Q, si avrà in S l'altezza della superficie dell'acqua dal fondo delle fosse già detta in pied. 1, onc.ᵉ 7, pun. 11, differenza molto sensibile a confronto di quella,

che si è trovata nel Problema antecedente, e che maggiormente si accrescerà col trasporto della terra di tutte insieme le fosse sopra le 88 prese, che in questo Problema sono eziandio in complesso di estensione minore. E qui per conoscere questo aumento è necessario investigare la detta estensione superficiale in complesso di tutte le prese 88, la quale è presto che nota per la cognizione, che si ha del numero Q estensione del piano di fondo di tutte le fosse; poichè essendo T la superficie di tutta la valle: quando le sia tolto il numero Q, rimane precisamente il piano V, su cui distribuire a uguale altezza tutto il terreno, che uscirà da tutte le fosse, e che facilmente si determina col far il prodotto X, cioè moltiplicando per li 3 Piè della profondità il detto numero Q; e finalmente con la divisione d'X per V comparirà nel quoziente Y l'altezza del terreno sul piano della valle in oncie 6, e punti 4 poco più, le quali unite in Z all'altezza che ha il detto piano dalla superficie dell'acqua, allorchè fosse ridotta nelle fosse: costituirà piedi 1, oncie 10, punti 5 di terreno in secco, maggior di piedi 1, oncie 4, e punti 5 sopra le oncie 6 assegnate in principio dal padrone nel suo primo divisamento.

X 600060
12
720072|0
41748
12
500976
48760

[illegible]

2640
504
10560
13200
T 1330560
200020
V 113054|0
Y -:6:4
1:4:1
Z Pied. 1:10:5

Problema III. *Determinare la lunghezza, la larghezza, e la superficie d'una delle prese 88 della valle.*

In questo Problema non è subito da credere, che a quella spiaggia, ov'è diretta la lunghezza della valle, sia tuttavia diretta la lunghezza della presa; ma convien trarne la cognizione dalle operazioni stane necessarie a farsi. Intanto è cosa certa, che la lunghezza della valle accorciata in G mediante il diffalco di tutte le larghezze delle fosse trasversali, divisa per 22, determina nel quoziente a di piedi 109:3:3 $\frac{7}{11}$ una dimensione delle prese, cioè quella che seconda la lunghezza della valle; e che in modo simile diminuita la larghezza piedi 504 della valle col diffalco delle tre larghezze delle fosse per lungo pied. 33:8:10; e divisa per 4 la differenza b: si troverà in c l'altra dimensione di piedi 117:6:9 $\frac{1}{2}$ a seconda di essa larghezza; ma comechè questa dimensione è maggior della prima, ci manifesta apertamente, che la lunghezza, e larghezza delle prese rispondono contrariamente alla lunghezza, e larghezza della valle. Resta ora da soddisfare alla terza dimanda; e la via più breve è quella, che divide per 88 il numero V; dalla qual operazione usciranno in d piedi 12847, oncie 0, punti 9, atomi 1 per la superficie d'una presa; il che si conferma ugualmente in e, ovvero in f, mediante la moltiplicazione della lunghezza e larghezza fra di se d'una presa ritrovate di sopra, se non fosse una picciolissima incomputabile differenza per la trascuranza degli 8 punti, come si è avvertito. La detta superficie ridotta alla denominazion maggiore che può ricevere, è vanezze 11, tavole 26, e piedi 31 con le seguenti minuzie nominate di sopra; cosicchè una presa è poco meno di mezzo campo di terra.

22
a Piè. 109:3:3 $\frac{7}{11}$

504
33:8:10
b Pied. 470:3:2
c Pied. 117:6:9 $\frac{1}{2}$

Pied. 109:3:3 $\frac{7}{11}$
Pied. 117:6:9:6
763
1199
54:6
6:9:9
4:6:6
29:4:8:4:6
2:5:4:8:4:6
-:2:8:-:9:1 $\frac{7}{11}$
2:8:-:9:1 7
-:10:8:3:-:6
e Pied. 12847:-:7:4:7:9 $\frac{9}{11}$

2404:-:8
204
6
12
72
6
12
80

109:3:3 $\frac{7}{11}$
12
1308
3
1311
12
15735
11
173092

88
d Piè. 12847:-:6 $\frac{6}{11}$

117:6:9 $\frac{1}{2}$
12
1410
12
16929
2
33859

173092
33859
1557828
865460
1384736
519276
519276
5860722028
532792911: $\frac{7}{11}$
266396455: $\frac{1}{2}$
22199704: 7
1849975: 4
154164: 7
f 12847:-

1130540
250
745
414
620
4
12
48
12
576
48

Generalmente Problema IV. *Una valle (non compreso l'argine, che la circonda) è lunga pertiche 440; larga pertiche 84; e il più, che di essa resti inondato dall'acqua, è sino all'altezza di oncie 3. Per ricuperarla a qualche uso si pensa d'inciderla per lungo con tre fosse e con fosse ventuna per largo, tutte di mezzo, cioè sì le prime che le seconde relativamente a se stesse, con la medesima distanza fra di se e dall'argine; le quali costituiscano 88 prese uguali di terreno ricuperato. La profondità delle fosse dovrà essere di piedi 3; ma la loro larghezza dovrà dipendere dalla condizione, che raccogliendosi nelle cavità di esse tutta l'acqua inondante, e trasportandosi sul piano rimanente la terra che ne uscirà: debba*

nascere un tale compenso, che essa equabilmente distribuita per tutto, sovvanzi d'un piede la superficie dell'acqua ridotta nelle fosse, ovvero abbiasi un piè di terreno in secco. Ritrovare pertanto, quanta sia per essere la necessaria larghezza delle fosse.

pert.²	440	= onc.²	31680	= a
pert.²	84	= onc.²	6048	= b
piedi	3	= onc.²	36	= c
		onc.²	3	= m
piede	1	= onc.²	12	= n
fosse			21	= r
fosse			3	= t

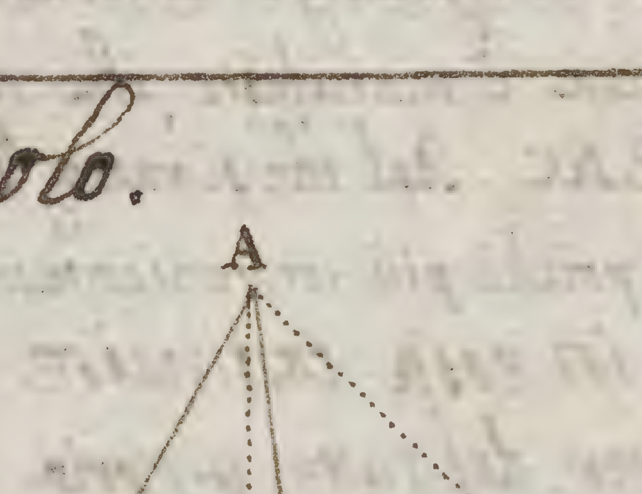
Non sarà forse difficile il prevedere, che questa soluzione è per ascendere a un grado elevato; nientedimeno ridotte le dimensioni alla sola specie delle oncie, si sostituiscano le lettere alle medesime, e agli altri numeri, ch'entrano in questo calcolo; e siano quelle di prima, come dimostra la figura. Posto inoltre x la larghezza comune a tutte le fosse, giovèrà tosto rilevare la quantità della loro superficiale apertura, la qual consiste nel prodotto di tutte le loro lunghezze raccolte in summa, moltiplicate per la detta larghezza x; la qual summa non è da credere, che sia $at+br$, come sembrar potrebbe a taluno, ma convien diminuirla di tante larghezze, quanti sono i luoghi, nè quali a vicenda le fosse tra di loro si segano; e però la detta summa sarà $at+br-trx$, che moltiplicata come si è detto, offre $atx+brx-trx^2$ di superficiale apertura, ovvero anche di superficie del fondo; la quale in seguito moltiplicata per la profondità c, determina tutto il recipiente delle fosse nel prodotto $actx+bcrx-ctrx^2$, e che ad un tempo dinota la terra tutta da distribuirsi sul piano restante della valle, la di cui estensione superficiale è ab, e che diminuita della superficiale apertura delle fosse, fa che il piano restante sia ~~[illegible]~~ $ab-atx-brx+trx^2$. Questo piano dividendo tutto il recipiente ritrovato delle fosse, determina l'altezza della terra sopra di esso, allorchè vi fosse equabilmente distribuita, cioè $\frac{actx+bcrx-ctrx^2}{ab-atx-brx+trx^2}$. La quantità poi dell'acqua inondante la valle essendo abm, divisa dall'apertura superficiale delle fosse, stabilisce $\frac{abm}{atx+brx-trx^2}$ per l'altezza dell'acqua nelle medesime, quando vi fosse ridotta. Ma essendosi detto sin da principio, che l'altezza dell'acqua nelle fosse con l'altezza del terreno superiore alla superficie dell'acqua ha da uguagliare l'altezza della terra trasportata sul piano restante della valle con la profondità insieme delle fosse: dunque si avrà l'equazione $\frac{abm}{atx+brx-trx^2}+n = \frac{actx+bcrx-ctrx^2}{ab-atx-brx+trx^2}+c$, che per isvolgerla intieramente, e farle manifestare, qual grado le convenga, si faranno le seguenti operazioni, cioè riducendo gl'intieri sotto li rispettivi denominatori, e simplificando li numeratori $\frac{abm+antx+bnrtx-nrtx^2}{atx+brx-vtx^2} = \frac{abc}{ab-atx-brx+rtx^2}$; dipoi levando le frazioni, e di nuovo simplificando $a^2b^2m+a^2bntx+ab^2nrx-3abnrtx-a^2bmtx-a^2nt^2x^2+anrt^2x^2-ab^2mrx-b^2nr^2x^2+bnr^2tx^2+abmrtx^2+anrt^2x^3+bnr^2tx^3-nr^2t^2x^4 = a^2bctx+ab^2crx-abcrtx^2$. Finalmente ordinando, e dividendo per nr^2t^2, si trova l'equazione di quarto grado $\frac{a^2b^2m}{nr^2t^2} =$

$$x^4-\left(\frac{anrt^2+bnr^2t}{nr^2t^2}\right)x^3+\left(\frac{a^2nt^2-anrt^2+b^2nr^2-bnr^2t-abmrt-abcrt}{nr^2t^2}\right)x^2+\left(\frac{a^2bmt+a^2bct+ab^2mr+ab^2cr+3abnrt-a^2bnt-ab^2nr}{nr^2t^2}\right)x$$

Ovvero $\frac{a^2b^2m}{nr^2t^2} = x^4-\left(\frac{a}{r}+\frac{b}{t}\right)x^3+\left(\frac{a^2}{r^2}-\frac{a}{r}+\frac{b^2}{t^2}-\frac{b}{t}-\frac{ab.\overline{m+c}}{nrt}\right)x^2+\left(\frac{a^2b.\overline{m+c}}{nr^2t}+\frac{ab^2.\overline{m+c}}{nrt^2}+ab.\frac{3}{rt}-\frac{a}{r^2t}-\frac{b}{rt^2}\right)x$.

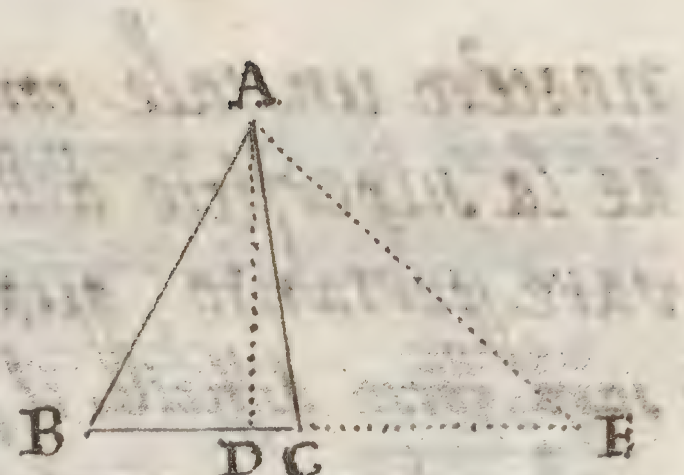
Questa equazione è non solo completa, perchè ha tutti li suoi termini, ma inoltre è così complicata per la moltitudine dei coefficienti, che gli accompagna, alti all'estremo, quando sono divisi da un solo comune denominatore; o per la somma varietà delle frazioni, quando siano ribassati a divisori minimi, che basta vederla per abbandonarla sul fatto, e non farne più verun conto.

Problema. *Duplicare un angolo acuto d'un dato triangolo.*



Il dato triangolo ABC abbia il lato AB $= a$, BC $= c$, AC $= m$, e l'angolo BAC acuto: bisogna duplicare l'angolo BAC.

Dal vertice A dell'angolo BAC si tiri sul lato BC la perpendicolare AD $= r$, la quale o caderà dentro il triangolo ABC, o fuori di esso. Cada primieramente dentro di esso, e faccia il segamento DC $= n$. S'intenda poi la BC prolungata in E in modo, che tirata la AE faccia l'angolo BAE doppio dell'angolo acuto BAC; e posta la CE $= x$: per la prop. 3 del sesto sarà la AE $= \frac{ax}{c}$; e per la prop. 47 del primo si avrà l'equazione $r^2+n^2+2nx+x^2 = \frac{a^2x^2}{c^2}$; cosicchè levando la frazione, divenga $c^2r^2+c^2n^2+2c^2nx+c^2x^2 = a^2x^2$; e trasportando a destra i termini, ov'entra l'incognita, pare, che manifestamente sia positiva l'equazione $c^2r^2+c^2n^2 = a^2x^2-c^2x^2-2c^2nx$, perchè tutti li termini a sinistra sono positivi; niente di meno se per avventura (il che può accadere) il lato AB fosse minore del lato BC; siccome in tal caso a^2-c^2 sarebbe quantità negativa:



così non sarebbe senza ragione la ricerca sopra il fenomeno, che fosse per nascere. Intanto continuando le operazioni, si divida per a^2-c^2; e si avrà $\frac{c^2r^2+c^2n^2}{a^2-c^2} = x^2 - \frac{2c^2n}{a^2-c^2}x$; e compiendo il quadrato e riducendo l'omogeneo sotto un denominatore comune, sarà $\frac{a^2c^2r^2+a^2c^2n^2-c^4r^2-c^4n^2+c^4n^2}{(a^2-c^2)^2} = x^2 - \frac{2c^2n}{a^2-c^2}x + \frac{c^4n^2}{(a^2-c^2)^2}$; per il che estraendo la radice e trasportando si conchiuda per valor dell'incognita x la espressione segnata dalla lettera P. Ma osservandosi, che il quadrato della perpendicolare AD insieme col quadrato del segamento DC si uguaglia al quadrato del lato AC; vale a dire che $r^2+n^2 = m^2$: facendo la sostituzione, il valore della incognità x verrà espresso più semplicemente, come alla lett.ª Q;

P $\frac{c^2n \pm c\sqrt{(a^2r^2+a^2n^2-c^2r^2)}}{a^2-c^2}$

Q $\frac{c^2n \pm c\sqrt{(a^2m^2-c^2r^2)}}{a^2-c^2}$

la qual cosa veramente conveniva, che sin da principio si avvertisse; e che però si vuole praticare adesso per instruzione, riassumendo la prima equazione $r^2+n^2+2nx+x^2 = \frac{a^2x^2}{c^2}$; nella quale, come si è veduto, ritrovandosi li due termini r^2+n^2 esser uguali ad un solo m^2, l'equazione diventa $m^2+2nx+x^2 = \frac{a^2x^2}{c^2}$, che levando la frazione, e trasponendo, come si è fatto, si cangia in $c^2m^2 = a^2x^2 - c^2x^2 - 2c^2nx$; e poi in $\frac{c^2m^2}{a^2-c^2} = x^2 - \frac{2c^2n}{a^2-c^2}x$; e che compiendo il quadrato, col ridur l'omogeneo come prima sotto un denominator comune esibisce $\frac{a^2c^2m^2-c^4m^2+c^4n^2}{(a^2-c^2)^2} = x^2 - \frac{2c^2n}{a^2-c^2}x + \frac{c^4n^2}{(a^2-c^2)^2}$; ma cavando la radice, e risolvendo si trova un altra configurazion di lettere R sotto il segno radicale. Se pertanto il valor dell'incognita ha da esser uniforme, è necessario, che per entro le due espressioni sienvi delle quantità teorematiche, che l'una con l'altra si compensino adeguatam.te; del che non solo si può venire in cognizione applicando i numeri, ma ancora maneggiando le lettere.

R $\frac{c^2n \pm c\sqrt{(m^2 \cdot \overline{a^2-c^2}+c^2n^2)}}{a^2-c^2}$

Imperciochè si uguaglino tra loro li termini, che sono sotto li segni radicali, giacchè su quelli, che sono fuori non può cadere alcuna differenza, essendo gli stessi in una e l'altra espressione. Facciasi dunque $a^2m^2-c^2r^2 = a^2m^2-c^2m^2+c^2n^2$: e determinando prima la lettera m, si troverà $c^2m^2 = c^2n^2+c^2r^2$, cioè (dividendo per c^2) $m^2 = n^2+r^2$, come appunto poco fa si è detto; e determinando r^2 si trova $r^2 = m^2-n^2$, il che conviene necessariamente alla perpendicolare d'un triangolo, il quadrato della quale si uguaglia al quadrato di un lato meno il quadrato del segamento adjacente al medesimo. Dunque l'una e l'altra espressione radicale è una cosa medesima, abbenchè diversamente configurata; ma sarà bene far uso della prima Q, la quale si riduce ancora più ristretta, facendola come in S.

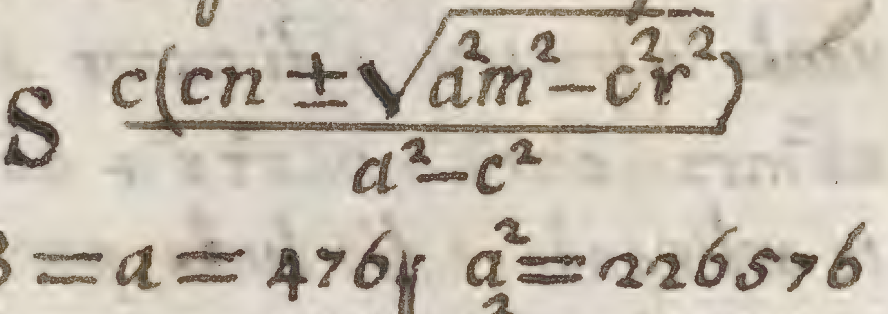
S $\frac{c(cn \pm \sqrt{a^2m^2-c^2r^2})}{a^2-c^2}$

Applicazione ai numeri. I lati del triangolo, le altre linee occorrenti, ed anche i loro quadrati abbiano i valori, e sieno, come appajono in fianco descritti, co' quali è stata eziandio delineata la soprapposta figura del triangolo. e prendendo il radicale primieramente col segno positivo, si troverà la $CE = \frac{289(18785+\sqrt{26192185600})}{226576-83521} = \frac{289(18785+161840)}{143055} = \frac{289 \cdot 180625}{143055} = 364\frac{89}{99}$; per cui prolungandosi la base BC verso E, incominciando dal punto C, e facendo la CE di parti $364\frac{89}{99}$, delle quali la AB ne contiene 476; e tirata la AE, l'angolo BAE sarà doppio dell'angolo BAC. Prendendo poi la radice negativamente, si avrà $\frac{289 \cdot -143055}{143055} = -289$, cioè il preciso valor della base BC del triangolo; il qual valor essendo negativo, c'ingiunge di tirare dal punto C la retta linea CB dalla parte opposta alla CE positiva, e in tale maniera è manifesto che non si potrà tirare che la base CB, quando si voglia, che l'angolo CAB sia uguale all'angolo BAC. Dal che si raccoglie, che la proposta fatta nel Problema all'Algebra non è stata concepita ne' giusti suoi termini; poichè più convenientemente si dovea dire: Dato il triangolo ABC: alla retta linea AC, e al punto A dato in essa costituire un angolo uguale all'angolo BAC; e appunto sotto questi termini si trova esser del tutto propria la risoluzione, che se n'è fatta. Sotto adunque un simile enunziato sia proposto di

$AB = a = 476$	$a^2 = 226576$
$BC = c = 289$	$c^2 = 83521$
$AC = m = 425$	$m^2 = 180625$
$AD = r = 420$	$r^2 = 176400$
$DC = n = 65$	$cn = 18785$

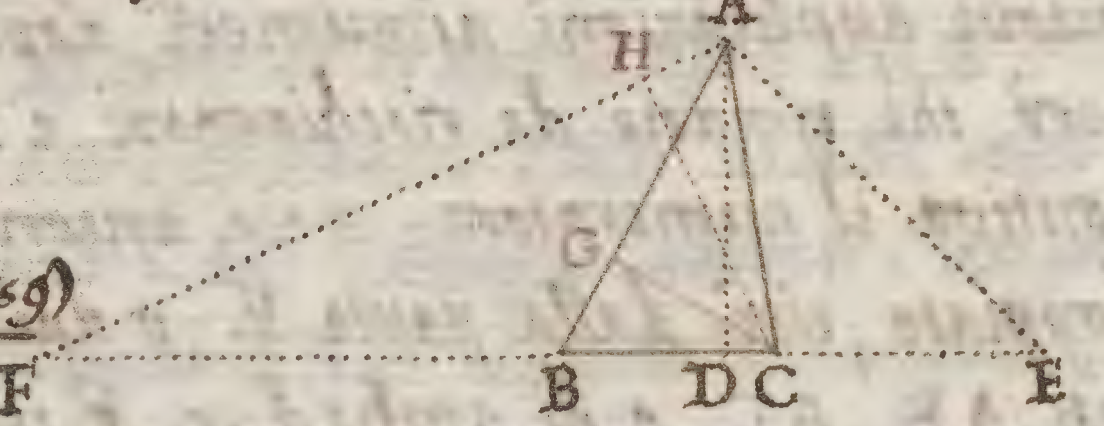
$a^2m^2 = 40925290000$
$c^2r^2 = 14733104400$
$a^2m^2 - c^2r^2 = 26192185600$

Costituire al punto A del lato AB un angolo uguale all'angolo CAB del triangolo ACB.



È manifesto, che diverrà il lato $AC = a = 425$; il lato $AB = m = 476$; che rimarrà lo stesso il lato $CB = c = 289$; e così pure la medesima la perpendicolare $AD = r = 420$; ma si cambia il segamento DC nel segamento $DB = n = 224$, per cui sarà $cn = 64736$, restando fermi li quadrati superiormente descritti, ed anche i loro prodotti fra alcuni di essi; onde si vegga apertamente, che sussiste senza la menoma alterazione la radice 161840. Si avrà pertanto, con la radice positiva, $BF = \frac{289(64736+161840)}{180625-83521} = \frac{289 \cdot 226576}{97104} = \frac{65480464}{97104} = 674\frac{1}{3}$; e con la radice negativa ritorna come prima la base $BC = \frac{289 \cdot -97104}{97104} = -289$. Si tiri la retta AF.

Determinare il valore delle due rette linee **AE AF**, *e manifestare la natura del triangolo* **AFE**.



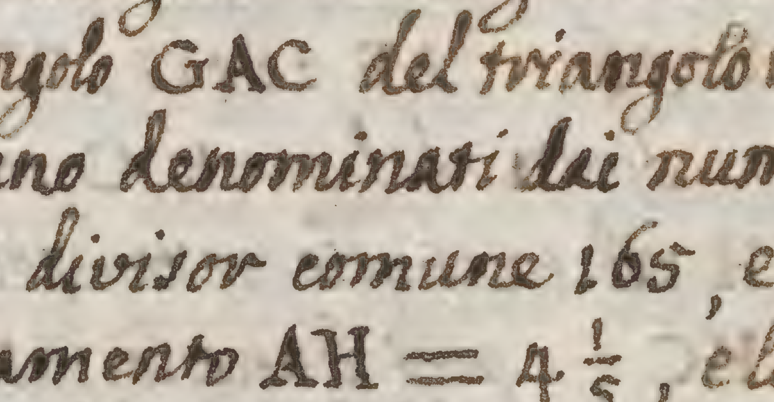
Si è veduto in principio, che il valore simbolico di ciascuna delle due linee AE AF si è $\frac{ax}{c}$. *In seguito si è veduto* $x = CE = 364\frac{89}{99}$; *e* $x = BF = 674\frac{1}{3}$: *dunque sarà* $AE = \frac{476 \cdot 364\frac{89}{99}}{289} = \frac{476(99 \cdot 364 + 89)}{99 \cdot 289} = \frac{476 \cdot 36125}{28611} = \frac{17195500}{28611} = 601\frac{1}{99}$; *e* $AF = \frac{425 \cdot 674\frac{1}{3}}{289} = \frac{425(3 \cdot 674 + 1)}{3 \cdot 289} = \frac{425 \cdot 2023}{867} = \frac{859775}{867} = 991\frac{66}{99}$. *In terzo luogo si raccolgano in summa li tre valori di tutta la FE, cioè* $FB + BC + CE = 674\frac{33}{99} + 289 + 364\frac{89}{99} = 1328\frac{23}{99}$; *e si avrà un triangolo in numeri* $991\frac{66}{99}$, $1328\frac{23}{99}$, $601\frac{1}{99}$ *razionale di area, perchè ha la perpendicolare* $AD = 420$. *Ha inoltre l'angolo FAE triplo dell'angolo FAB del triangolo AFB, li di cui lati sono* $991\frac{66}{99}$, $674\frac{33}{99}$, 476; *ovvero triplo dell'angolo BAC del triangolo* ABC = 476, 279, 425; *e triplo anche dell'angolo CAE del triangolo* ACE = 425, $364\frac{89}{99}$, $601\frac{1}{99}$. *Li tre triangoli nominati posteriormente sono pur essi razionali di area, perchè hanno comune la perpendicolare col primo. Li due triangoli AFC, ABE hanno gli angoli FAC BAE al vertice uguali fra loro, a cadauno de quali l'angolo FAE ha la ragione dè numeri 3:2. Sublimati li valori di tutti i lati, mediante la moltiplicazione per il denominator 99, onde liberarli dalle frazioni, tutti li prodotti che ne escono, si trovano per avventura divisibili dal 17; cosicchè per esso depressi si riducono secondo chè mostra la figura; cò quali componendo li triangoli nominati di sopra, si potranno forse ulteriormente deprimerli a termini minimi, se avessero qualche altro divisor massimo comune; come sarebbe particolarmente il triangolo maggior di tutti AFE, i lati del quale sono 5775, 7735, 3500, che per mezzo del 35 divisor massimo comune diventa 165, 221, 100. Il triangolo poi AFB ha per lati li numeri 5775, 3927, 2772, che sono divisibili dal picciol numero 3, onde non si possano molto deprimere; e perciò divengono 1925, 1309, 924; e così di seguito.*

AF =	5775	FC = 5610
FE =	7735	
AE =	3500	
FB =	3927	
AB =	2772	
BC =	1683	
CE =	2125	
AC =	2475	

Teorema ora nato. *Tirate le due perpendicolari CG sopra il lato AB del triangolo ABC, e CH sopra il lato AF del triangolo AFC; essendo l'angolo FAC doppio dell'angolo BAC: per il Teorema nuovo in Libro Farragine Matematica C pag. 64. li due cateti AG GC del triangolo rettangolo AGC saranno li generatori del triangolo rettangolo AHC.*

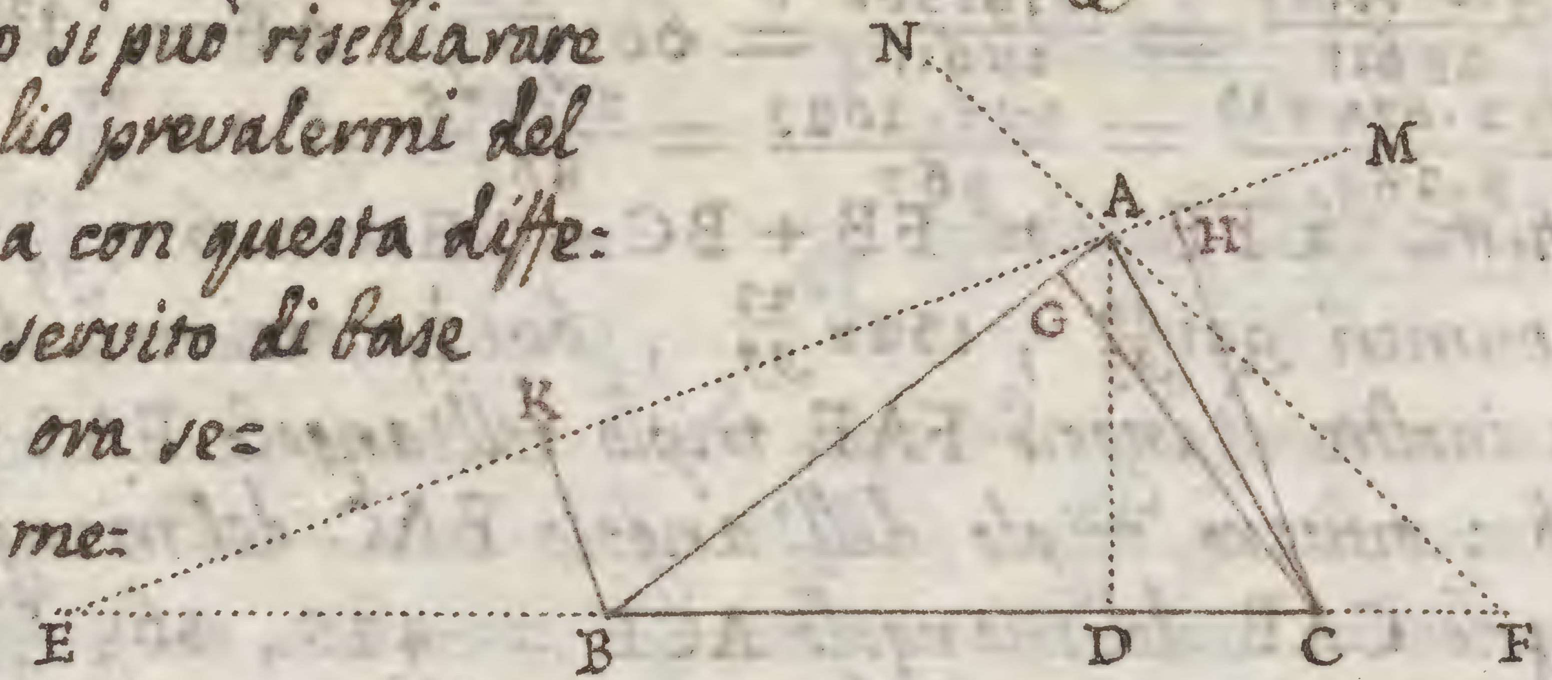
Imperciocchè deprimendo li tre lati del triangolo ABC mediante il massimo divisor 99, si trova il lato AB = 28, BC = 17, AC = 25. Con la cognizione di questi tre lati si trovi il segamento AG = 20, e la perpendicolare CG = 15; il lato poi AC è 25: dunque deprimendo questi numeri, mediante il comune massimo divisor 5, si avrà il primo triangolo rettangolo della Genesi $\frac{4:3}{5}$, *li cateti del quale sono 4:3. Questi si moltiplichino fra di se, e 24 sarà il loro prodotto raddoppiato. Si facciano di essi li quadrati 16, 9; la differenza dè quali* $16-9=7$, *e la somma* $16+9=25$ *col 24 costituiscono un triangolo rettangolo numerico* $\frac{24:7}{25}$ *che ha un angolo doppio d'uno degli angoli del triangolo rettangolo AGC* $= \frac{4:3}{5}$. *Ma il triangolo rettangolo AHC in numeri ha l'angolo HAC doppio dell'angolo GAC del triangolo rettangolo AGC parimente in numeri: dunque i lati del triangolo AHC saranno denominati dai numeri* $\frac{24:7}{25}$. *Si deprimano li tre lati del triangolo AFC, mediante il massimo divisor comune 165, e i lati diverranno AF = 35, FC = 34, AC = 15; e similmente si trovi il segamento* $AH = 4\frac{1}{5}$, *e la perpendicolare* $CH = 14\frac{2}{5}$; *e il triangolo rettangolo sarà* $\frac{14\frac{2}{5} : 4\frac{1}{5}}{15}$, *che sublimandolo per 5 diverrà* $\frac{72:21}{75}$; *ma poi deprimendolo per 3, comparisce in punto coi lati denominati dai numeri* $\frac{24:7}{25}$; *e però li due cateti AG GC del triangolo rettangolo AGC sono li generatori del triangolo rettangolo AHC, come si dovea dimostr.*

Allo stesso modo tirate dal punto B le due perpendicolari sopra i lati AC AE, nasceranno due triangoli rettangoli numerici del tutto simili ai triangoli AGG AHC l'uno all'altro; avvegnachè avendo tutti un angolo retto: l'angolo BAC è comune al ambedue li triangoli, che sono nel triangolo ABC, e l'angolo FAC è uguale all'angolo BAE; e perciò si conchiuderà ugualmente, come nel Teorema.



Secondo Caso. *Ma la perpendicolare AD cada fuori del triangolo ABC; e poste le cose medesime, se nel primo caso si ha la* $DE = x+n$, *nel secondo si ha* $DE = x-n$; *laonde fatta, e poi ordinata l'equazione allo stesso modo, si avrà* $c^2r^2 + c^2n^2 = a^2x^2 - c^2x^2 + 2c^2nx$, *la quale risolta, si ha* $\frac{c(-cn \pm \sqrt{a^2m^2 - c^2r^2})}{a^2-c^2}$, *e che non*

differisce dalla prima che nel segno − applicato al termine cn; e quindi non sembra necessario far nuove applicazioni ai numeri, dopochè per le cose vedute non possono incontrarsi difficoltà. Quello però, che rimane da rischiararsi è il caso, in cui il denominatore a^2-c^2 sia quantità negativa, stando positivo il numeratore, e ciò ancora da qualunque parte del triangolo si voglia che l'angolo sia raddoppiato, cioè dalla parte E, o dalla parte F; il che succede, quando la BC è maggiore di uno de' lati AB AC, o di ambedue. E comechè ciò appunto si può rischiarare più facilmente con l'applicazione ad un esempio: voglio prevalermi del triangolo medesimo adoperato antecedentemente; ma con questa differenza, che se allora a bello studio il lato minimo ha servito di base col lato massimo a sinistra, e a destra il lato medio: ora segnatamente servirà di base il lato massimo col lato medio a sinistra, e il minimo a destra. Ma perchè questi lati possono deprimersi mediante il comune divisor 17, per cui divengono 28, 25, 17: del dato triangolo ABC sia il lato AB $= a = 25$; BC $= c = 28$; AC $= m = 17$; e si troverà il segamento DC $= n = 8$; e conseguentemente la perpendicolare AD $= r = 15$. E quindi prendendo la formola S e sostituendo i numeri alle lettere si conseguirà il valor seguente $\frac{28(224 \pm \sqrt{4225})}{625-784} = \frac{28(224+65)}{-159} = \frac{28\cdot289}{-159} = \frac{8092}{-159} = -50\frac{142}{159}$. Ovvero $\frac{28(224-65)}{-159} = \frac{28\cdot159}{-159} = -28$; cioè con la radice positiva si trova un valor negativo $-50\frac{142}{159}$, e con la radice negativa un valor tuttavia negativo, che uguaglia la base. Di questo secondo già se n'è parlato; ma di quel primo si deve dire, e si dice con verità, che secondo esso la linea CE non devesi tirare a parte destra, ma bensì alla sinistra, e anche dal punto C, come indica la figura; poichè dal punto E al punto A tirata la linea EA, e prolungata per quanto si voglia in M costituisce l'angolo CAM uguale all'angolo BAC, e per conseguenza si verifica, che nell'angolo BAM si è raddoppiato l'angolo BAC, come ordina il Problema.



$$S \quad \frac{c(cn \pm \sqrt{a^2m^2-c^2r^2})}{a^2-c^2}$$

AB $= a = 25$	$a^2 = 625$
BC $= c = 28$	$c^2 = 784$
AC $= m = 17$	$m^2 = 289$
DC $= n = 8$	$r^2 = 225$
AD $= r = 15$	$cn = 224$

$$a^2m^2 = 180625$$
$$c^2r^2 = 176400$$
$$a^2m^2-c^2r^2 = 4225$$

Invertendo si faccia $a = 17$, $m = 25$; e stando ferma la perpendicolare $r = 15$, il segamento DB sarà $n = 20$; e di nuovo sostituendo i numeri si ha $\frac{28(560+65)}{289-784} = \frac{28\cdot625}{-495} = \frac{17500}{-495} = -35\frac{35}{99}$. Oppure $\frac{28(560-65)}{-495} = \frac{28\cdot495}{-495} = -28$; cioè con la radice positiva il valor negativo $-35\frac{35}{99}$, secondo il quale a parte destra dal punto B si deve tirare la BF; e in seguito dal punto F al punto A tirar la linea FA, che prolungata a piacere in N costituisce l'angolo CAN doppio dell'angolo CAB; il che è ciò, che si dovea dichiarare per intelligenza del caso, che a^2-c^2 fosse quantità negativa.

Col simbolo $\frac{ax}{c}$ si trovano eziandio i valori delle due rette AE AF, cioè di AE $= \frac{25\cdot-50\frac{142}{159}}{28} = -45\frac{70}{159}$; e di AF $= \frac{17\cdot-35\frac{35}{99}}{28} = -21\frac{46}{99}$. Il terzo lato poi EF del triangolo AEF sarà $50\frac{142}{159} + 7\frac{35}{99}$, che sublimandoli con la moltiplicazione per un numero comune $159\cdot33 = 99\cdot53 = 5247$, divengono AE $= 238435$, AF $= 112625$, EF $= 305620$; e poi deprimendoli per un comune divisor 5, sono AE 47687, AF 22525, EF 61124; si può aggiungervi la perpendicolare AD 15741.

Tirata dal punto C sopra il lato AB la perpendicolare CG, e sopra il lato EAM la perpendicolare CH: il triangolo rettangolo AGC avrà l'angolo GAC uguale all'angolo HAC del triangolo rettangolo AHC; e però l'angolo GAH, cioè l'angolo BAM sarà manifestamente doppio dell'angolo BAC; imperciocchè il quadrato $28^2 = 784$ del lato BC sottratto dalla summa dei quadrati $25^2+17^2 = 625+289 = 914$ degli altri due lati AB AC lascia la differenza 130. Questa dimezzata, e divisa per AB $= 25$ esibisce il quoziente $\frac{65}{25} = \frac{13}{5} = $ AG; ma e il lato AC $= 17$: dunque sublimando l'uno e l'altro $\frac{13}{5}$, 17 per 5: sarà AG $= 13$, AC $= 85$; cosicchè sia la perpendicolare CG $= 84$. I lati adunque del triangolo rettangolo AGC sono $\frac{84:13}{85}$. Di nuovo i lati del triangolo AEC sono AE $= 425$, EC $= 476$, AC $= 159$, come si può ritrarre dai valori trovati; e dal quadrato $476^2 = 226576$ del lato EC sottratta la summa dei quadrati $425^2+159^2 = 180625 + 25281 = 205906$ dei lati AE AC, lascia la differenza 20670 che dimezzata e divisa per AE $= 425$ offre il quoziente $\frac{10335}{425} = \frac{2067}{85} = $ AH: dunque sublimando li due 159, $\frac{2067}{85}$, per il denominator 85, diverranno AC $= 13515$, AH $= 2067$, onde si abbia la perpendicolare CH $= 13356$. I lati adunque del triangolo rettangolo AHC sono $\frac{13356:2067}{13515}$; ma questi possono deprimersi per il numero 159, e divengono li medesimi del triangolo AGC, cioè $\frac{84:13}{85}$: dunque l'angolo GAC è uguale all'angolo

HAC; e conseguentemente l'angolo BAM è doppio dell'angolo BAC.

In altro modo. Dal punto B si tiri la perpendicolare BK; ed essendo li due angoli EAB BAM uguali a due retti, e uguali ad un retto li due angoli GCA CAG: gli angoli EAB BAM sono doppj degli angoli GCA CAG; ma l'angolo BAM è doppio dell'angolo CAG: dunque ancora l'angolo EAB è doppio dell'angolo GCA. Essendo pertanto il triangolo rettangolo AKB, che ha un angolo doppio d'un angolo del triangolo rettangolo AGC: li cateti GC CA, cioè 84 : 13 del triangolo rettangolo AGC saranno li generatori del triangolo rettangolo AKB: dunque i lati del triangolo rettang.° AKB saranno denominati dai numeri $\frac{2.84.13 : 84^2-13^2}{84^2+13^2}$, cioè $\frac{2184 : 6887}{7225}$, che sono fra di se numeri primi, perchè sono tali ancor quei, da cui derivano; imperciocchè tolto il lato BC = 28 dal lato EC = 50 $\frac{142}{159}$, sarà il lato EB = 22 $\frac{142}{159}$. Il lato poi AE = 45 $\frac{70}{159}$, e AB = 25: dunque i lati del triangolo AEB sublimati per 159 saranno AE = 7225, EB = 3640, AB = 3975; e depressi per 5 diverranno 1445, 728, 795. Dai quadrati del primo e dell'ultimo uniti insieme 2088025 + 632025 = 2720050 si sottragga il quadrato del secondo 529984; e la differenza 2190066 dimezzata e divisa per il lato AE darà il segamento AK = $\frac{1095033}{1445}$, per cui si manifesta il lato BK = $\frac{347256}{1445}$. Il lato poi AB, quando si voglia ridotto sotto lo stesso denominator, è $\frac{1148775}{1445}$; e però deprimendo per 159 li tre numeratori, nei tre quozienti $\frac{6887 : 2184}{7225}$ ritrovandosi il triangolo rettangolo generato dai due cateti 84 : 13 del triangolo rettangolo AGC, si conferma vie più, che l'angolo BAM è doppio dell'angolo BAC.

Scolio Notabile. Ma una osservazione, che si può fare sopra le operazioni passate, forse ci scopre un elegante Nuovo Teorema non così facile a vedersi; poichè avendosi avuto in mira di prender li triangoli, sopra i quali si è fatta prova della risoluzione del problema, razionali di lati e di area: non si ha però avuto riguardo di prenderne uno più che un altro, ma indistintamente come si sono presentati; con tutto ciò è osservabile che sempre si è cavata dal radicale la sua radice in numeri perfetti, onde si abbia motivo di credere, che l'espressione letterale $\sqrt{(a^2m^2 - c^2r^2)}$ ridotta in numeri sia sempre un quadrato, quella volta che il triangolo, come si è detto, sia razionale di lati, e di area.

Per la qual cosa considerando ciò, che rappresentano le lettere, e la loro combinazione secondo quella determinazion che si è data alle medesime nell'applicarle al triangolo: si è voluto, che la lettera a sia un lato del triangolo, la lettera m un altro lato, e che il terzo lato sia la lettera c. Ma questo lato ha una qualità di più non comune agli altri due, cioè che come base cade sopra esso la perpendicolare r, cosicchè cr dinoti il prodotto della perpendicolare nella base nel modo, che am dinota il prodotto degli altri due lati moltiplicati fra di se. Ma a^2m^2 è il quadrato di am, e c^2r^2 è il quadrato di cr: dunque si potrà pronunziare, che in ogni triangolo razionale di lati e di area il quadrato, che si fa dal prodotto della perpendicolare nella base, su cui cade, sottratto dal quadrato, che si fa dal prodotto degli altri due lati del triangolo fra di se moltiplicati, lascia la differenza numero quadrato. Ma internandosi maggiormente nella considerazione: il prodotto della perpendicolare nella base è il doppio dell'area del triangolo, il qual doppio è sempre lo stesso, qualunque sia la perpendicolare, e il lato opposto all'angolo, da cui la si tira; e conseguentemente è sempre uno il quadrato del medesimo doppio. Dunque con maggior estensione si dirà: In ogni triangolo razionale di lati e di area sono sempre numeri quadrati le tre differenze, che passano dal sottrarre il quadrato, che si fa dal doppio dell'area, dai quadrati, che si fanno dai tre prodotti dei lati a due a due moltiplicati fra di se.

Imperciocchè li tre lati del triangolo sieno m, n, u, e il doppio dell'area di esso sarà $\frac{1}{2}\sqrt{(2m^2n^2 + 2m^2u^2 + 2n^2u^2 - m^4 - n^4 - u^4)}$, cosicchè il quadrato sia $\frac{2m^2n^2 + 2m^2u^2 + 2n^2u^2 - m^4 - n^4 - u^4}{4}$. Il quadrato poi del prodotto di due lati qualunque è $m^2n^2 = \frac{4m^2n^2}{4}$: dunque sottrando quello da questo si avrà la differenza $\frac{m^4 + n^4 + u^4 + 2m^2n^2 - 2m^2u^2 - 2n^2u^2}{4}$; ma questa differenza è un quadrato, che ha la radice $\frac{m^2 + n^2 - u^2}{2}$: dunque dal quadrato m^2n^2, che si fa dal prodotto mn di due lati d'un triangolo sottratto il quadrato $\frac{2m^2n^2 + 2m^2u^2 + 2n^2u^2 - m^4 - n^4 - u^4}{4}$ lascia il quadrato $\frac{m^4 + n^4 + u^4 + 2m^2n^2 - 2m^2u^2 - n^2u^2}{4}$. Similmente si dimostrerà dei due quadrati m^2u^2, n^2u^2 delli due prodotti mu, nu degli altri lati; e le radici delle differenze saranno $\frac{m^2 - n^2 + u^2}{2}$, $\frac{-m^2 + n^2 + u^2}{2}$: dunque in ogni triangolo razionale di lati &c.; il che si dovea dimostr.e

Corollario I. Osservandosi, che il doppio dell'area di qualunque triangolo espressa per simboli non è per se quantità razionale, ma accidentalmente razionale per alcuni numeri; è manifesto, che il teorema non esige il triangolo razionale di area. Inoltre dopochè le tre radici si compongono dai quadrati dei tre lati, è pur

manifesto, che i tre lati medesimi possono essere razionali anche in potenza solamente; perchè se i tre lati sieno $\sqrt{m}$, $\sqrt{n}$, $\sqrt{u}$: si vede apertamente, che le tre radici saranno $\frac{m+n-u}{2}$ $\frac{m-n+u}{2}$ $\frac{-m+n+u}{2}$

Corollario II. Dalle proposizioni 12, e 13 del secondo di Euclide si apprende, che in un triangolo la differenza fra il quadrato di un lato, e la summa dè quadrati degli altri due lati è un doppio rettangolo contenuto da linee rette della condizione in dette proposizioni descritta; ed è noto ancora, che in ogni triangolo essendo tre le differenze, sono per conseguenza tre le paja di questi rettangoli. Allo stesso modo dalle tre radici sopra esposte si conosce chiaramente, come uno d'ogni pajo di tali rettangoli sia radice della sua differenza. Dunque generalmente

Teorema Nuovo. In ogni triangolo razionale di lati, anche in potenza solamente sono sempre numeri quadrati le tre differenze, che passano dal sottrarre il quadrato, che si fa dal doppio dell' area, dai quadrati, che si fanno dai tre prodotti dei lati a due a due moltiplicati fra di sè; e le loro radici saranno li rettangoli nominati nell' antecedente Corollario.

Problema. Conosciuti li tre lati d'un triangolo, trovarne l'area con nuovo metodo.

Dai tre lati si facciano li quadrati; e fra uno d'essi, e gli altri due sommati insieme si prenda la differenza. dalla metà di questa si faccia il quadrato, che si tolga dal quadrato fatto dal prodotto di què due lati moltiplicati fra di se, dè quali si sono sommati insieme li quadrati; e dimezzata la radice di ciò, che resta, sarà essa l'area del triangolo.

Esempio. Sia proposto di trovar l'area del triangolo 4, 13, 15, li cui quadrati sono 16, 169, 225. Fra la summa 185 dè due primi e il terzo 225 si ha la differenza 40, la di cui metà 20 fatta quadrato è 400. Moltiplicati li due primi lati 4.13, dal loro prodotto 52 si faccia il quadrato 2704, da cui sottratto il 400, dal 2304, che resta, si cavi la radice 48; poichè la sua metà 24 è l'area precisa del triangolo 4, 13, 15.

Fra il primo quadrato 16, e la summa 394 degli altri due presa la differenza 378, e poi dimezzata, della sua metà 189 si faccia il quadrato 35721; indi moltiplicati fra di se gli ultimi due lati 13.15, dal loro prodotto 195 si faccia il quadrato 38025, e si levi da esso il 35721, poichè ciò, che resta, sarà 2304 come sopra; il che conferma il nuovo metodo senza andar più avanti.

Scolio. Ognuno per avventura, che ha bisogno di calcolare con qualche frequenza dei triangoli dalla sola cognizione dei lati, inteso che abbia questo metodo, s' appiglierà a praticarlo, allettato dalla novità non meno che dalla facilità; ma facendone poi esperimento, s' indurrà ben presto a lasciarlo, e forse ancora con disprezzo, attese le numerose moltiplicazioni, che per il più assai elevate devono farsi per quadrar i lati, ed anche li prodotti dè lati. E per verità io non saprei finqui dargl' il torto, abbenchè un tal metodo non sia senza il suo pregio, come dedotto dal nuovo Teorema. Nulla di meno havvi un caso in cui diventa così facile e semplice, e in cui si fa così lungo e nojoso il metodo ordinario, che bisogna, per così dire, forzatamente far uso di quello e non di questo. Il caso consiste, quando i lati del triangolo sieno proposti razionali in potenza solamente: e l'esempio farà conoscere la verità di questo assunto.

Trovar l'area d'un triangolo, li di cui lati sono $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{11}$.

Col nuovo metodo. Per far li quadrati ordinati in primo luogo dal Problema, basta levar li segni radicali; e sommati insieme li primi due $7+8=15$, e sottratto il terzo 11, la differenza è 4, e dimezzata è 2. Il prodotto dei due lati $\sqrt{7}.\sqrt{8}$ è $\sqrt{56}$, da cui levato il radicale, è già fatto il quadrato 56. Da questo poi togliendo il quadrato della differenza dimezzata, rimane 52, la di cui radice prossima è $7\frac{1}{5}$; e la metà $3\frac{6}{10}$ è l'area del proposto triangolo.

Di nuovo si sommino li due ultimi numeri $8+11=19$, e dalla summa levato il primo 7, rimane 12; la di cui metà è 6, e 36 il suo quadrato: si faccia il prodotto $8.11=88$ degli ultimi due numeri, da cui sottratto il quadrato 36, rimane il 52 come prima.

Inoltre si sommino il primo e terzo $7+11=18$, da cui si levi l'8 numero di mezzo, e 5 sarà la metà della differenza 10. Moltiplicati il primo e terzo $7.11=77$, e sottratto il 25 quadrato del 5, comparisce nulla meno il 52.

Per questo affare credo non possa darsi un calcolo più breve, comunque si voglia prendere i lati.

Col metodo ordinario. Se nè osservino le operazioni, che saranno più intese veggendole che facendone la descrizione; notando però l'ordine tenuto nel farle, il quale ne diminuisce il numero, e le abbrevia; e con tutto questo non sono poche, nè brevi.

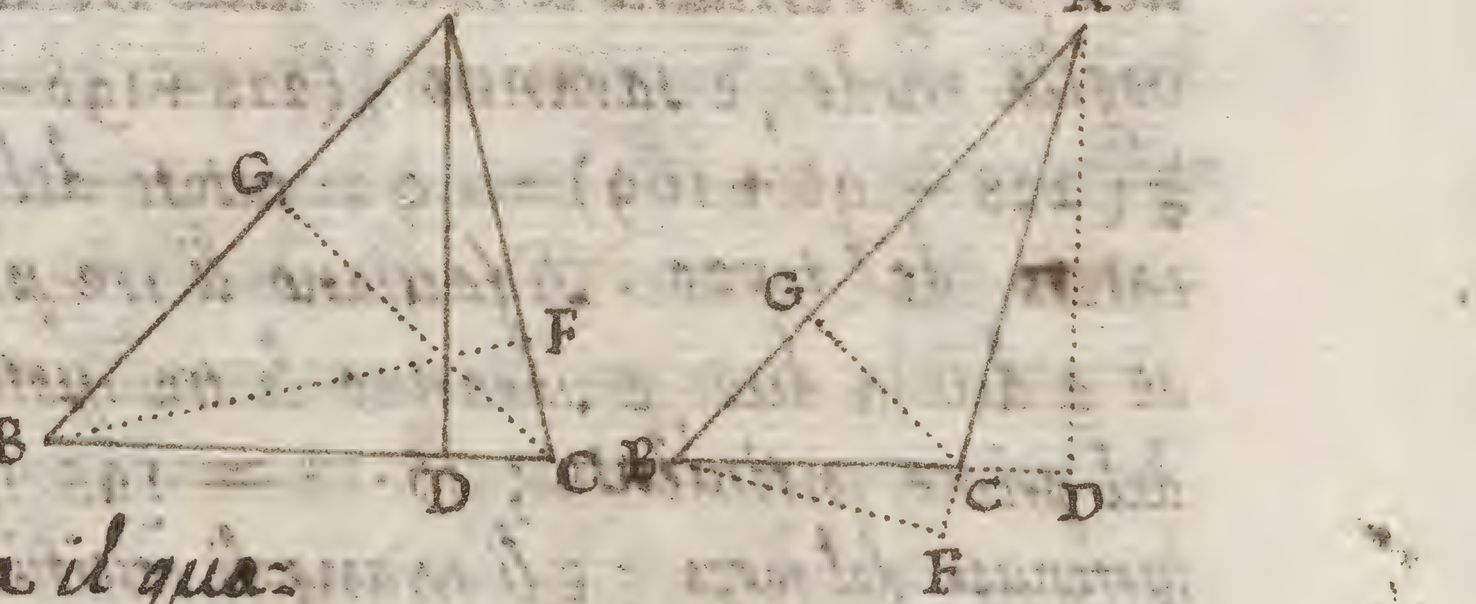
$$\begin{array}{l} \sqrt{7} \\ \sqrt{8} \\ \sqrt{11} \\ \hline \sqrt{7}+\sqrt{8}+\sqrt{11} \\ \sqrt{7}+\sqrt{8}-\sqrt{11} \\ \sqrt{7}-\sqrt{8}+\sqrt{11} \\ -\sqrt{7}+\sqrt{8}+\sqrt{11} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \sqrt{7}+\sqrt{8}+\sqrt{11} \\ \sqrt{7}+\sqrt{8}-\sqrt{11} \\ \hline 7+\sqrt{56}+\sqrt{77}+\sqrt{88} \\ 8+\sqrt{56}-\sqrt{77}-\sqrt{88} \\ -11 \\ \hline 4+2\sqrt{56} \quad 0 \quad 0 \end{array}$$

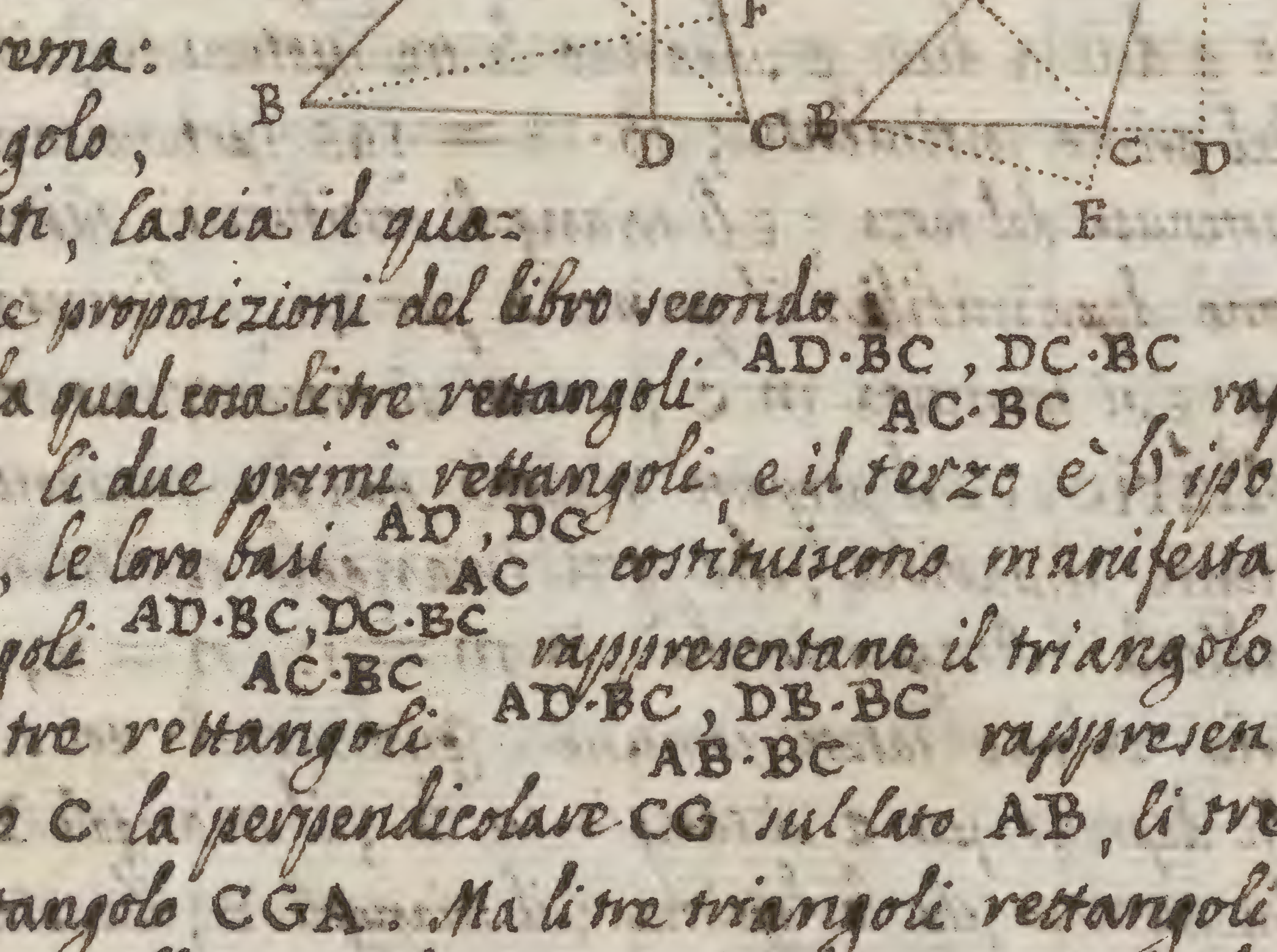
$$\begin{array}{l} \sqrt{7}-\sqrt{8}+\sqrt{11} \\ -\sqrt{7}+\sqrt{8}+\sqrt{11} \\ \hline -7+\sqrt{56}-\sqrt{77}+\sqrt{88} \\ -8+\sqrt{56}+\sqrt{77}-\sqrt{88} \\ +11 \\ \hline -4+2\sqrt{56} \quad 0 \quad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 4+2\sqrt{56} \\ -4+2\sqrt{56} \\ \hline -16-8\sqrt{56} \\ 4\cdot 56+8\sqrt{56} \\ \hline 224-16 \quad 0 \end{array}$$

Questo metodo vuole, che l'ultimo risultato $224-16$ debba esser diviso dal 16; poichè nel quoziente $14-1=13$ stabilisce il quadrato dell'area del triangolo, la di cui radice è $3\frac{6}{10}$, come sopra, prossimamente; che anzi dividendo l'ultimo risultato $224-16$ per 4, siccome deve uscir nel quoziente il quadrato del doppio dell'area: così appunto si trova il numero preciso esibito dal nuovo metodo, cioè $56-4=52$.



Teorema di Ricapitolazione. Sia il triangolo ABC; e dal punto A tirata la perpendicolare AD sopra il lato BC, seghi il triangolo ABC in due triangoli rettangoli ABD ACD; e considerando su questa figura, quanto esprime il nuovo Teorema: il quadrato di AD·BC, che è il doppio dell'area del triangolo, sottratto dal quadrato di AC·CB, che è il prodotto di due lati, lascia il quadrato di DC·BC uno dè due rettangoli nominati nelle due proposizioni del libro secondo: dunque li quadrati $\overline{AD\cdot BC}^2+\overline{DC\cdot BC}^2=\overline{AC\cdot BC}^2$; per la qual cosa li tre rettangoli $\frac{AD\cdot BC,\ DC\cdot BC}{AC\cdot BC}$ rappresentano un triangolo Pitagorico, li cateti del quale sono li due primi rettangoli, e il terzo è l'ipotenusa; ma avendo tutti tre la medesima altezza BC, le loro basi $\frac{AD,\ DC}{AC}$ costituiscono manifestamente il triangolo rettangolo ADC: dunque li tre rettangoli $\frac{AD\cdot BC,\ DC\cdot BC}{AC\cdot BC}$ rappresentano il triangolo rettangolo ADC. Allo stesso modo si dimostrerà, che li tre rettangoli $\frac{AD\cdot BC,\ DB\cdot BC}{AB\cdot BC}$ rappresentano il triangolo rettangolo ADB; e che tirata dal punto C la perpendicolare CG sul lato AB, li tre rettangoli $\frac{CG\cdot AB,\ AG\cdot AB}{CB\cdot AB}$ rappresentano il triangolo rettangolo CGA. Ma li tre triangoli rettangoli ADC ADB CGA sono li tre costituenti il triangolo ABC obliquangolo, come si è dimostrato in libro Farragine Matematica E pag. 33, e segg.: dunque li tre rappresentanti sono triangoli rettangoli costituenti il triangolo obliquangolo ABC.



Scolio. Ogni triangolo rettangolo ABC (I.) è costituente di sè medesimo; poichè se dal vertice A dell'angolo retto si tira la perpendicolare AD sopra l'ipotenusa BC, li due triangoli ADB ADC essendo simili a tutto il triangolo ABC: in spezie non sono che un medesimo triangolo. Se poi le perpendicolari siano tirate dai punti B C, esse cadono sopra li due cateti BA CA: dunque ogni triangolo rettangolo è costituente di sè medesimo.

Di tutti li triangoli equilateri ABC (2.) un solo è il triangolo rettangolo costituente cioè ADB, ovvero ADC $= 1\,;\,\frac{\sqrt{3}}{2}$; avvegnachè se dal punto C si tira la perpendicolare CG: li triangoli rettangoli ~~rettangoli~~ CGB CGA sono li medesimi che gli altri due ADB ADC &.

Di tutti li triangoli isosceli li triangoli rettangoli costituenti sono due, cioè ADB CGA (3.), perchè ADC è lo stesso che ADB, e CGB è lo stesso in spezie che ADB, perchè sono rettangoli, ed hanno comune l'angolo obliquo B.

Finalmente di tutti li triangoli scaleni non sono più di tre li triangoli rettangoli costituenti, cioè ADB ADC CGA (Vedi le due Figure del Teorema anteced.te); imperciocchè tirate dai punti B C le due perpendicolari BF CG: per la ragione sopraddetta il triangolo CGB è lo stesso in spezie che il triangolo ADB; BFA il medesimo che CGA; e per ultimo BFC non differisce dal triangolo ADC per la reciproca somiglianza, che hanno fra di se li due triangoli copulati al medesimo angolo.

Problema Ultimo. Dati li tre lati m n u di qualsivoglia triangolo: trovar ciascuno dei triangoli rettangoli, che lo costituiscono.

Per il Teorema antecedente il doppio dell'area del triangolo è sempre un cateto; e però sarà esso comune ad ogni costituente triangolo. Dunque giusta la pratica ordinaria $\frac{1}{2}\sqrt{(m+n+u)(m+n-u)(m-n+u)(-m+n+u)}$ *sarà il primo cateto. Il secondo cateto di uno dei tre costituenti sarà* $\frac{m^2+n^2-u^2}{2}$, *e sarà* mn *l'ipotenusa. Il secondo cateto d'un altro costituente sarà* $\frac{m^2-n^2+u^2}{2}$, *ed* mu *l'ipotenusa. Finalmente del terzo costituente* $\frac{-m^2+n^2+u^2}{2}$ *è il secondo cateto, ed* nu *l'ipotenusa.*

Cateto primo comune	Cateti secondi	Ipotenuse
$\frac{1}{2}\sqrt{(m+n+u)(m+n-u)(m-n+u)(-m+n+u)}$	: $\frac{1}{2}(m^2+n^2-u^2)$	: mn
	: $\frac{1}{2}(m^2-n^2+u^2)$	: mu
	: $\frac{1}{2}(-m^2+n^2+u^2)$	: nu

Esempio in numeri. *Sia* $m=15$, $n=14$, $u=13$; *l'area di questo triangolo è 84: dunque 168 il suo doppio è il cateto comune d'ogni triangolo costituente. Si facciano li quadrati dai tre lati, e si prendano le metà delle tre differenze fra un quadrato, e la somma degli altri due, presi in qualsivoglia modo, e saranno* $\frac{1}{2}(225+196-169)=126$ *cateto del primo triangolo.* $\frac{1}{2}(225-196+169)=99$ *cateto del secondo;* $\frac{1}{2}(-225+196+169)=70$ *cateto del terzo. Si facciano li tre prodotti de' lati, moltiplicandoli fra di se a due a due, e saranno le tre ipotenuse, cioè* $15\cdot14=210$ *ipotenusa del primo costituente;* $15\cdot13=195$ *ipotenusa del secondo;* $14\cdot13=182$ *ipotenusa del terzo: e li triangoli costituenti saranno A B C. Tutti tre sono deprimibili: il primo A per 42, e diventa a; il secondo B per 3, e si riduce a b; il terzo C per 14, e si tramuta in c; e tutti si riscontrano compresi nel picciolo Albero della Genesi.*

A	168 : 126 / 210	a	4 : 3 / 5
B	168 : 99 / 195	b	56 : 33 / 70
C	168 : 70 / 182	c	12 : 5 / 13

Corollario. *Se il proposto triangolo non sia razionale di area, chiaramente apparisce, che ogni triangolo costituente avrà un cateto radicale. Imperciocchè sia* $m=11$, $n=8$, $u=7$; *e si troverà l'area* $2\sqrt{780}$ *cateto comune. Continuando poi si trova il triangolo D, che depresso per 2 si cangia in d; il triangolo E originario, perchè non ha numero, che lo deprima; il triangolo F, che similmente per 2 si deprime al triangolo f.*

D	$2\sqrt{780}$: 68 / 88	d	$\sqrt{780}$: 34 / 44
E	$2\sqrt{780}$: 53 / 77		
F	$2\sqrt{780}$: 4 / 156	f	$\sqrt{780}$: 2 / 28

Ma quello ancora è vero, che se un triangolo abbia li tre lati in potenza solamente commensurabili in modo, che l'area sia razionale: può qualche volta accadere, che li tre costituenti abbiano i lati razionali. Ciò accade nel triangolo, che ha per lati $\sqrt{800}$, $\sqrt{450}$, $\sqrt{98}$, *il cui doppio dell'area, comune cateto alli tre costituenti è 168; e gli altri cateti con le ipotenuse sono li descritti nella figura qui sopra.*

168 : 576 / 600	∾	7 : 24 / 25
168 : 224 / 280	∾	3 : 4 / 5
168 : 126 / 210	∾	4 : 3 / 5

Vedi Farragine Matematica F.ᵃ pag. 46 sino 51, ove si leggono cose medesime quasi tutte, e qui replicate, perchè svanita la memoria di averle scritte molto tempo prima.

Problema. *Continuare l'estrazione della radice quadrata senza interromperla nel caso, che si fosse adoperato un quoziente minore del vero.*

Accade spesso nella divisione, e molto più nelle estrazioni delle radici di non poter conoscere con prontezza, per quante unità si comprenda il primo carattere del divisore nel primo, o ndi due primi caratteri del dividendo; tantochè si scrive alcune volte nel quoziente un carattere maggiore, o minore del giusto, onde convenga poi cancellarlo dopo averne fatto esperimento, e rifar la operazione fallata col sostituir nel quoziente quel carattere, che in virtù di esso esperimento si è veduto esser il vero. La maniera di continuar l'operazione senza rinovarla quando si fa la semplice divisione, e nel caso che si abbia adoperato nel quoziente un carattere minor del giusto, non ha con se difficoltà, che vaglia per doverne dare insegnamento; ma nella estrazione delle radici le difficoltà si moltiplicano come i loro gradi a segno, che prima di scrivere il carattere a suo luogo nel quoziente, spesso giova esaminarlo e scriverlo poi conosciuto che sia; se non fosse nella sola estrazion della radice quadrata come la prima e la più semplice, che la difficoltà nel sopraddetto caso non è grande, ma che però esige dell'istruzione per tanti, che non sanno come giungere a conoscerne la regola.

Abbiasi dunque da estrarre la radice quadrata dal numero A; e senza ch'io ripeta le cose necessarie e costumate in questa pratica: estraendo la radice quadrata dal primo punto a parte sinistra occupato dal solo carattere 7, trovo il 2 nel quoziente B, che moltiplicato in se, e sottratto il prodotto 4 dal 7 lascia il 3 di residuo sotto del 7 in C. Raddoppio il 2, e sotto di esso in D scrivo il doppio 4; e in C aggiungo al 3 li due caratteri 21, che appartengono al punto, che segue, ed ho il 321 da dividere per 40. Questo in quello certamente non si racchiude per 8, essendo ciò manifesto; e temo che non vi si racchiuda per 7; ma nè meno voglio appigliarmi al 6; e perciò mi determino al 5, che senza scriverlo per quoziente in D appresso il 4, lo tengo in memoria, e ne fo l'esperimento in E nel seguente modo; cioè lo moltiplico in se, e il prodotto 25 sottratto dall'1 corrispondente, sublimato al 31, lascia il 6, che non lo tengo a memoria come il 5, ma lo scrivo realmente a suo luogo sotto il carattere 1, e riserbo il 3. In seguito moltiplico per 5 il 4 in D, e al prodotto 20 aggiungo il 3, che ho riservato, e tolgo il 23 dal corrispondente 32, e gli scrivo sotto il 9 che avanza; cosicchè si abbia in complesso in E il 96. Ma in D combinato il carattere 4 col carattere 5, che ho in memoria, esprimono il 45, che raddoppiato fa 90 numero minore del 96 in E: dunque si ritrae, che il dividendo 321 comprende una volta di più il divisor 40; e che per conseguenza si è adoperato il quoziente 5 minore del vero. E qui è dove appunto consiste ciò, che vuole il problema, cioè di continuare l'operazione servendosi del residuo 96 in E senza cancellarlo. e questo si fa raddoppiando in memoria il 5 solamente, e aggiungendo al doppio 10 la unità, di cui ho conosciuto dover accrescere il quoziente 5; poichè si deve subito moltiplicar la summa 11 per la stessa unità, e sottrarre il prodotto 11 dal suo corrispondente 6 sublimato al 16; e sotto in F si scrive la differenza 5; e riserbando 1 per il 16, si passa a moltiplicare per la stessa unità il 4, a cui aggiunto l'1, si toglie la summa 5 dal 9 corrispondente, scrivendovi sotto l'avanzo 4; cosicchè in F si abbia il giusto residuo 45, come si avene operato col quoziente 6 immediatamente sotto la linea dei caratteri C; e in tal guisa non si è cancellata la operazione fatta in E, e poi rinovata in F. Di fatto scritto il quoziente 6 presso il 4, e sottratto il 36 quadrato del 6 dall'1 in C, sublimato al 41, rimane il 5 in F; e riservando 4 e moltiplicando per il 6 il 4 in D, e aggiunto il 4: levato il 28 dal 32 in C, si ha ugualmente il 4 in F, cioè in complesso il 45, come sopra.

B	2	A	7219969
D	46	C	321
		E	96
		F	45

Per mostrare un secondo caso m'inoltro nell'estrazione di questa radice; e al 45 in F aggiungo li due caratteri 99 del terzo punto, per cui mi comparisce il dividendo 4599. Della radice 26 fo il doppio 52, e lo scrivo in G qual divisore; e che, com'è noto, debbo considerare per 520. Dividendo il 45 per 5, voglio deliberatamente appigliarmi ad un quoziente minore del vero, come il 6, che tengo a mente; e facendone il quadrato 36, lo levo dall'ultimo 9 sublimato a 39, e vi scrivo sotto il residuo 3, riserbando le unità delle tre decine. Moltiplico per 6 il 2 del 52 in G, e unito il prodotto 12 con le 3 unità riservate delle decine, levo la summa 15 dal secondo 9 sublimato al 19; e sotto esso noto il residuo 4, riservando 1. Per 6 moltiplico il 5 del 52, e al prodotto 30 aggiunto l'1 riservato, sottraggo il 31 dal 45 in F; e sotto il 45 scrivo in H il 14, che avanza. Da questa operazione ravviso, che il quoziente 6 è minore del vero per due unità, perchè il divisor 520 è contenuto due volte abbondantemente nel residuo H 1443. Per la qual cosa raddoppio il quoziente 6, e al 12 aggiungo le due unità, che ho conosciuto mancarvi e con la mente moltiplico per le 2 unità ora dette la summa 14, per cui ho il prodotto 28, che sottraggo dal 3 in H sublimato al 33; e vi scrivo sotto il residuo 5, riservando 3 per le tre decine. Moltiplico per 2 il 2 del 52 in G; e al prodotto 4 aggiungo la riserva del 3 e tolgo la summa 7 dal 4, che è vicino al 3 in H, sublimato al 14, e ~~come si~~ pongo sotto esso il residuo 7, e riservo 1. Finalmente moltiplico il 5 per 2, e aggiunto l'1, levo l'11 dal 14, e resta il 3 da scriverglì sotto onde in L si abbia di residuo 375, e in G appresso il 2 scrivo il quoziente 8, cioè il 6 di prima unito al 2 posteriore. E per verità il quadrato 64 del quoziente 8 sottratto dal primo 9 sublimato al 69, lascia 5 di residuo. Moltiplicando il 2 seguente per 8 e aggiungendo 6, il 22 sottratto da 29 lascia il 7; e riserbando il 2, l'8 moltiplicando il 5, e fatta la summa 42, lascia il 3, levandola dal 45; il tutto come sopra.

B	2	A	7219969
D	46	C	321
G	52	E	96
		F	4599
		H	1443
		L	375

L'ultima operazione per conseguir il compimento della radice quadrata del dato numero A, esige per quoziente il 7; ma per dar sopra questa regola un terzo esempio voglio adoprar il numero 4, su cui fare l'esperimento, come si è fatto negli altri, e per cui si avrà il residuo K; mediante il quale conoscerò che debbo accrescer il 4 di tre altre unità, cioè di 3, il quale non mi dà altro obbligo, che raddoppiato il 4 summar esso 3 con l'8 e moltiplicare per 3 la somma 11 con quel che segue, e fare tutte le consecutive sottrazioni come si veggono in figura, riputandosi soverchio il ridirle per li passati esempj e per le quali sarà zero l'ultimo residuo, avvegnachè sia quadrato il proposto numero 7219969, che ha di radice 2687.

B 2
D 46
G 528
536 $\frac{4}{3}$

A 7219969
C 321
E 96
F 4599
H 1443
L 37569
K 16113
0000

Non ho descritto questo ripiego come cosa da praticare; ma per mostrare che può farsi, e che forse userò con piacere, presentandosi il caso, giacchè la mente ha voluto suggerirmelo. Ogni verità, che si scuopre, ha sempre il suo merito, per quanto sia tenue.

Problema. *Dato il triangolo* **ABC**, *li di cui lati sono in potenza solamente commensurabili, e del valore dimostrato dalla figura: trovar la sua area in decimali quarte non meno con l'ordinario, che col metodo recentemente scoperto (*); e poi col farne il confronto dinotare la differenza.*

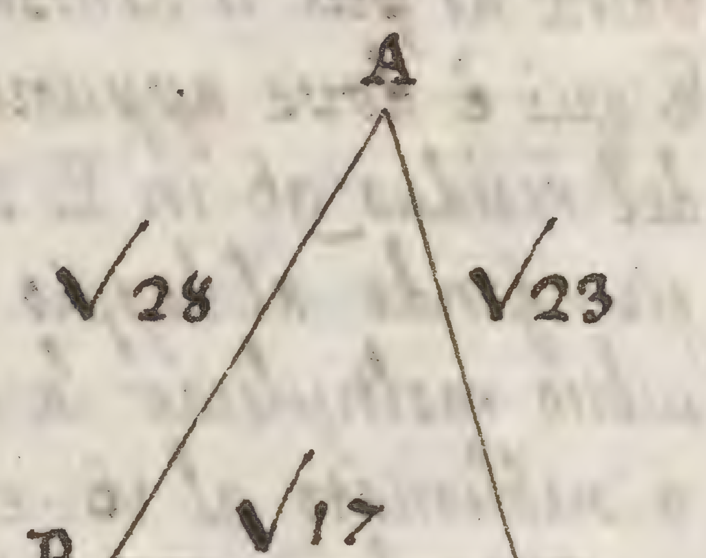
5 / 102 / 1049 — D — 28 / 300 / 9600 / 159

4 / 87 / 949 — E — 23 / 700 / 9100 / 559

4 / 81 / 822 — F — 17 / 100 / 1900 / 256

529
480
412
1421

G
710 $\frac{1}{2}$
181 $\frac{1}{2}$
230 $\frac{1}{2}$
298 $\frac{1}{2}$



Per conseguir l'area con la regola comune in decimali quarte, è manifesto, che convien ridurre a decimali seconde il valore di ciascun lato; il primo de' quali AB risulta in 5.29″, come fa conoscere la operazione D. Il secondo AC accresciuto dell'unità, perchè il residuo sorpassa la metà, è 4.80″, come dalla operazione E; e il terzo BC nella operazione F si mostra essere 4.12″. Facendo la somma di tutti tre, e prendendo le differenze di ciascun di loro dalla metà di essa, s'incontra, che queste sono tutte accompagnate da frazione, come apparisce in G; e però ad oggetto di facilitare le numerose moltiplicazioni, che si hanno a fare di tutte, è bene raddoppiarle; e cavata la radice dall'ultimo prodotto, prenderne poi la quarta parte; la qual operazione si vede in H, e per la quale si conchiude in I, che con la regola consueta l'area del triangolo proposto ABC, inoltrandola sino alle decimali quarte, è 9.4195‴‴.

H
1421
363
4263
8526
4263
515823
461
515823
3094938
2063292
237794403
597
1664560821
2140149627
1188972015
141963258591

3
67
746
7527
75348
753570

H
141963258591
519
5063
58725
603685
090191

I 94195

Col nuovo metodo dalla summa K dei quadrati delli due lati AC BC levato il quadrato del terzo lato AB, si trova la differenza L, della quale dimezzata sene fa il quadrato M e si sottrae dal prodotto N fatto dai due quadrati dei lati AC BC. Finalmente cavata la radice Q sino alle quarte decimali dalla differenza P, la metà R di detta radice è l'area del triangolo ABC. Questo metodo è il più prossimo ed esatto evidentemente, perchè non è soggetto ad alterazioni, e trascuranze come l'antecedente; e posti l'un l'altro al confronto si trova in S, che il primo più del secondo si allontana dal vero per la quantità di $\frac{12}{10000}$; e le operazioni in quello sono state più numerose e prolisse. Il che è ciò che doveasi fare.

23
17
K 40
28
L 12
6
6
M 36

Q
1
28
368
3764
37681
376824

23
17
N 391
36
P 355
255
3100
15600
54400
1671900
164604

R 9.4207
I 9.4195
S $\frac{12}{10000}$

(*) *Vedi in questo libro alla pagina 32.*

Die 9 Novembris 1780, ineunte Hora 13.ª

Scoperte Nuove Teorematiche.

Teorema I. Qualunque ſumma di numeri cubici in ſerie naturale dall' unità è numero quadrato.

Teorema II. La radice di tale quadrato è la ſumma delle radici dei cubi, che lo coſtituiſcono.

Teorema III. Perchè li cubi ſono in ſerie naturale dall' unità: ancora le loro radici ſono in ſerie naturale dall' ūità; ma la ſumma de' numeri in ſerie naturale dall' unità è numero triangolare: dunque la radice di un quadrato, che derivi da una ſumma di numeri cubici in ſerie naturale dall' unità, è un numero triangolare.

Teorema IV. Se d' un numero triangolare ſi faccia il quadrato: ſarà queſto una ſumma di numeri cubici in ſerie naturale dall' unità.

A *Cubi in serie naturale dall' unità.*

B *Radici de' Cubi nella serie medesima.*

C *Numeri quadrati summe de' Cubi A.*

D *Radici quadrate delle summe C; summe delle Radici B; e triangolari.*

D	B	A	C
1	1	1	1
3	2	8	9
6	3	27	36
10	4	64	100
15	5	125	225
21	6	216	441
28	7	343	784
36	8	512	1296
45	9	729	2025
55	10	1000	3025
66	11	1331	4356
78	12	1728	6084
91	13	2197	8281

Problema I. *Summare qualunque data moltitudine di numeri cubici, li quali ſiano in ſerie naturale dall' unità.*

Siano 47 di moltitudine li numeri cubici da sommarsi insieme nella serie naturale proposta; e perchè eziandìo le radici de' medesimi sono in serie naturale dall' unità: sarà l' unità il primo termine della serie, e l' ultimo termine sarà il 47. La moltitudine poi de' termini è nulla meno 47: dunque fatta la summa del primo termine ed ultimo, si avrà il 48, di cui, essendo pari, si prenderà la metà 24; e per essa moltiplicato il numero 47 de' termini, si avrà nel prodotto 1128 la summa di tutte le radici de' cubi, che formano la data serie. Dal prodotto 1128 si faccia il quadrato 1272384, e la summa della proposta moltitudine di 47 numeri cubici in serie naturale dall' unità sarà il 1272384.

Imperciocchè per il Teorema I qualunque summa di numeri cubici in serie naturale dall' unità è numero quadrato, la di cui radice per il Teorema II è la summa delle radici de' cubi; ma il numero 1272384 è un quadrato, la di cui radice 1128 è la summa di tutte le radici de' cubi 47, che costituiscono la data serie de' medesimi dall' unità: dunque il numero 1272384 è la somma della proposta moltitudine 47 di numeri cubici in serie naturale dall' unità; il che è ciò, che doveasi fare.

Problema II. *Summare qualunque tronco della ſerie naturale de' numeri cubici, eſſendo noti gli eſtremi.*

Sia proposto di summare il tronco della serie naturale de' numeri cubici il minimo de' quali sia 226981, e 912673 il massimo; e ritrovata la radice cubica di entrambi, 61 sarà la radice del primo, e 97 quella del secondo; onde chiaramente apparisca, che il tronco si compone da trentasette numeri cubici, le di cui radici sono li due numeri 61, e 97 con tutti gli altri, che fra questi si racchiudono in serie naturale. Ma tutta intera la serie dall' unità il di cui ultimo cubo è il massimo, ne comprende novantasette: dunque la serie, che rimane dall' unità, levato il tronco, si costituisce da cubi sessanta. Per la qual cosa si faccia per il Problema antecedente la summa 3348900 di 60 numeri cubi-

ci in serie naturale dall'unità; e similmente la summa 2259009 di 97 numeri cubici della serie medesima; e sottratta quella da questa, la differenza 19242109 per le cose ora dette sarà manifestamente la summa del tronco della serie naturale de' numeri cubici, il minimo de' quali è 226981, e 912673 il massimo, com'era proposto di fare.

Problema III. *Data una summa di numeri cubici in serie naturale dall'unità: trovare la moltitudine de' medesimi, che la costituiscono.*

Il numero 2047761 sia una summa di numeri cubici in serie naturale dall'unità: conviene trovare la moltitudine de' medesimi, che la costituiscono.

È subito manifesto per il Teorema I, che il dato numero è un quadrato; e per il Teorema III, che la di lui radice è numero triangolare. Si trovi perciò la di lui radice quadrata 1431; e comechè raddoppiando ogni numero triangolare, si ha un numero pronico, la di cui radice pronica è il lato del numero triangolare; il lato poi del numero triangolare esprime la moltitudine delle radici dei numeri cubici nella data serie naturale dall'unità: dunque raddoppiando il 1431, e dal doppio 2862 cavando la radice prossima quadrata 53, si avrà la radice pronica, cioè il numero ch'esprime la moltitudine delle radici de' cubi che costituiscono la data summa de' medesimi in serie naturale dall'unità; e però ancora sono 53 li numeri cubici in serie naturale dall'unità, che costituiscono la data summa 2047761; il che dovea farsi.

Problema IV. *Data la summa di qualunque tronco della serie naturale de' numeri cubici; e dato un estremo de' medesimi: trovare la moltitudine de' cubi, che lo costituiscono.*

Il numero 20604680 sia la summa d'un tronco della serie naturale de' numeri cubici; e degli estremi sia dato primieramente il minimo, cioè 205379: bisogna trovare la moltitudine de' cubi, che costituiscono il tronco.

Dal cubo dato si cavi la radice cubica 59; e per il Problema I si faccia la summa 2927521 di numeri cubici 58, cioè di un cubo meno di quelli, che indica la radice cubica 59, i quali sieno in serie naturale dall'unità. A questa summa si aggiunga la summa data 20604680 del tronco, e unitamente facciano 23532201; dipoi per il Problema III si trovi la moltitudine de' numeri cubici, che in serie naturale dall'unità costituiscono la summa 23532201; e si troverà, che sono 98. Da questi si tolgano li cubi 58 aggiunti al tronco; e li rimanenti, che lo costituiscono, saranno 40.

Ma in secondo luogo sia dato degli estremi cubi il massimo, cioè 941192; e cavata parimente la sua radice cubica 98, per il Problema I si faccia la summa 23532201 di numeri cubici 98, i quali sieno in serie naturale dall'unità; e da questa summa si tolga la summa data del tronco, da cui si lasci la differenza 2927521. È manifesto, che questa differenza è la summa d'una moltitudine di numeri cubici in serie naturale dall'unità; e quindi per il Problema III trovata come sopra la moltitudine de' numeri cubici, che la costituiscono, saranno 58; ma uniti con quelli del tronco sono 98: dunque li cubi che costituiscono il tronco, saranno 40, com'era proposto di fare.

Corollario I. Sottraendo un quadrato numerico da un altro quadrato numerico, i lati de' quali sieno numeri interi, lascia un gnomone numerico, li di cui supplementi e il quadrato, che lo costituiscono, hanno i loro lati numeri interi: dunque la summa d'ogni tronco d'una serie naturale di numeri cubici (perchè deriva dalla sottrazione di un quadrato numerico da un altro numerico, i lati de' quali sono numeri interi) è un gnomone, li di cui supplementi, e il quadrato hanno i lati numeri interi.

Corollario II. E però d'ogni tronco di tal genere la summa sarà sempre divisibile per lo meno da due numeri l'uno per l'altro.

Corollario III. Perchè ogni summa di numeri cubici in serie naturale dall'unità è numero quadrato, la di cui radice è numero triangolare: la summa, e la differenza de' lati, che costituiscono uno dei due supplementi del gnomone, che è summa d'un tronco d'una serie naturale di numeri cubici, sono due numeri pronici.

Teorema V. *La differenza delle radici proniche di tai numeri esprime la moltitudine de' cubi, che costituiscono il tronco.*

Teorema VI. *La radice pronica maggiore è radice cubica del cubo massimo;*

e la radice pronica minore, accresciuta dell'unità, è radice cubica del minimo, cioè degli estremi, che costituiscono la detta summa del tronco.

Problema V. *Data la summa di qualunque tronco della serie naturale de' numeri cubici: trovare la moltitudine de' cubi, e di essi gli estremi, che lo costituiscono.*

La summa data d'un tronco della serie naturale de' numeri cubici sia 329373; la quale per il Corollario 2 sarà divisibile per lo meno da due numeri l'uno per l'altro. Si trovino tutti li suoi divisori, i quali sieno posti a due a due quelli, che fra di sè fanno funzione reciproca in dividere tutto il numero l'un per l'altro come si vedono in A B C D E F G, in cui il 3 divide tutto il numero 329373 per il 109791, che gli è a fronte; il 9 per il 36597, e così degli altri; e sommandogli insieme a due a due, quelli, che si corrispondono, si osservi qual coppia di essi faccia la summa numero pronico; il che si conoscerà con cavar da essa la radice quadrata, e osservare se il residuo si uguaglia alla radice medesima.

$$\begin{array}{r} 1109 \\ 297 \\ \hline 1406 \\ 812 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr} \mathrm{H} & \begin{smallmatrix}3\\67\end{smallmatrix} & \begin{array}{r}1406\\506\\37\end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr} \mathrm{K} & \begin{smallmatrix}2\\48\end{smallmatrix} & \begin{array}{r}812\\412\\28\end{array} \end{array}$$

			329373
	3	:	109791
	3	:	36597
	3	:	12199
	11	:	1109

A	3	:	109791
B	9	:	36597
C	11	:	29943
D	27	:	12199
E	33	:	9981
F	99	:	3327
G	297	:	1109

Di tutte le coppie, che dividono il dato numero, l'ultima solamente in G, uniti insieme li suoi divisori 297 : 1109, fa la summa 1406; la di cui radice quadrata in H è 37, e lascia nulla meno 37 di residuo. Si sottragga inoltre un divisor dall'altro, e la differenza 812 sarà istessamente numero pronico; poichè estratta la radice 28, rimane similmente 28. Li numeri poi 37, e 28 differiscono fra di se di 9 unità: dunque per il Teorema 5 la summa 329373 del tronco proposto si costituisce da 9 cubi in serie naturale; e per il Teorema 6 il massimo di essi è il cubo del 37, e il cubo del 29 è il minimo; il che era d'uopo di fare.

Lemma. *Dati due numeri qualunque: trovarne due altri, la somma de' quali, e la differenza siano numeri pronici.*

Li due numeri dati sieno a, c; e si facciano i loro quadrati a^2, c^2, a' quali si uniscano le rispettive radici, e si avranno a^2+a, c^2+c numeri pronici. Sieno poi x, z gli altri due numeri, che si vogliono; e per la condizione del Lemma si avranno le due equazioni A B; sopra le quali operando con una summa, ed una sottrazione, in C, e D si conseguiscono li due numeri cercati, cioè $x = \frac{a^2+a+c^2+c}{2}$, $z = \frac{a^2+a-c^2-c}{2}$

$$\begin{array}{lrcl} \mathrm{A} & x+z &=& a^2+a \\ \mathrm{B} & x-z &=& c^2+c \\ & 2x &=& a^2+a+c^2+c \\ & 2z &=& a^2+a-c^2-c \\ \mathrm{C} & x &=& (a^2+a+c^2+c) : 2 \\ \mathrm{D} & z &=& (a^2+a-c^2-c) : 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} a^2+a+c^2+c \\ a^2+a-c^2-c \\ \hline a^4+a^3+a^2c^2+a^2c+a^2+ac^2+ac-c^4-c^3-c^2 \\ +a^3-a^2c^2-a^2c \quad -ac^2-ac \quad -c^3 \\ \hline a^4+2a^3 \; 0 \quad 0+a^2 \; 0 \quad 0-c^4-2c^3-c^2 \end{array}$$

Corollario I. Dunque perchè il prodotto dei due numeri trovati è la summa di un tronco della serie naturale de' numeri cubici: una tal summa si potrà esprimere generalmente $\frac{a^4+2a^3+a^2-c^4-2c^3-c^2}{4}$, ovvero $\frac{a^2(a^2+2a+1)-c^2(c^2+2c+1)}{4}$; ma si conoscerà meglio espressa così $\left(\frac{a^2+a}{2}\right)^2-\left(\frac{c^2+c}{2}\right)^2$; da cui si vede chiaramente, che come apparisce dal Problema II la detta summa d'un tronco è la differenza di quadrati, che si fanno da due numeri triangolari, ovvero da due numeri pronici dimezzati.

Corollario II. Dunque ogni summa di numeri cubici in serie naturale dall'unità potrà essere generalmente espressa per $\left(\frac{a^2+a}{2}\right)^2$, dinotando per la lettera a la radice del massimo cubo.

Scolio. Nel Problema V. è una cosa, che merita qualche osservazione il conoscere, che esso è determinato, quando la data summa del tronco è reale e precisa; siccome per l'opposto è indeterminato, allorchè dato qualunque numero per summa d'un tronco: fosse proposto di ritrovare la moltitudine de' cubi, e di essi gli estremi, che la costituiscono prossimamente.

Problema VI. *Date le radici degli estremi due cubi d'un tronco: trovare la summa del medesimo.*

Sia 19 la radice del cubo infimo, e sia 67 quella del supremo; e scemata dell'unità la prima radice 19, si faccia il numero pronico $18.19 = 342$ del numero 18; e anche il numero pronico $67.68 = 4556$ della radice 67. Si sottragga poi il primo dal secondo, e si prenda la metà della differenza $\frac{4556-342}{2} = \frac{4214}{2} = 2107$; e unito il primo col secondo si prenda la metà della

summa $\frac{342+4556}{2} = \frac{4898}{2} = 2449$; e le due metà fra di se moltiplicate facciano il prodotto $2107 \cdot 2449 = 5160043$, che sarà la summa del tronco della serie naturale de' cubi, il minimo de' quali avrà di radice il 19, e la radice del massimo sarà il 67; il che bisognava fare.

Questa operazione dipende tutta dal Lemma, e seguenti Corollarj.

Corollario I. Perchè la summa d'un tronco della serie naturale de' numeri cubici è la differenza della summa d'una minor serie naturale de' medesimi dall'unità da una serie simile maggiore, come appare dal problema II; e che la summa della serie naturale dall'unità delle radici è un numero triangolare, o sia la metà d'un numero pronico per il Teorema IV: ancora la summa d'un tronco della serie naturale delle radici sarà la differenza della summa d'una minor serie dall'unità delle medesime da una serie simile maggiore; e però si rende manifesto che la summa d'una serie naturale dall'unità delle radici si potrà esprimere per $\frac{a^2+a}{2}$, ovvero $\frac{c^2+c}{2}$; e per $\frac{a^2+a}{2} - \frac{c^2+c}{2}$ la summa generale di tutte le radici de' cubi compresi nella summa d'un tronco; e quindi nel problema antecedente la differenza $\frac{4556-342}{2} = \frac{4214}{2} = 2107$ è la summa di tutte le radici dei cubi compresi nel tronco.

Corollario II. Se un numero sia il prodotto di due numeri, i quali facciano fra di se la summa, e la differenza due numeri pronici: il prodotto sarà summa d'un tronco della serie naturale de' numeri cubici. Il massimo cubo avrà comune la radice col numero pronico maggiore; e la radice del numero pronico minore accresciuta dell'unità sarà la radice del cubo minimo del tronco. Vedi Teor. V., Teor. VI.

Corollario III. Reciprocamente la somma, e la differenza di due numeri triangolari costituiscono li due numeri, che fra di se moltiplicati producono la summa d'un tronco della serie naturale de' numeri cubici.

Scolio. Ogni numero essendo summa di se medesimo, anche ogni numero cubico è summa di se medesimo; e però ogni numero cubico considerato summa di se medesimo rappresenta un tronco della serie naturale de' numeri cubici. Ma un tronco di questa serie è il prodotto di due numeri, de' quali la summa, e la differenza sono pronici: dunque ogni cubo di numero è il prodotto di due numeri, de' quali la summa, e la differenza sono pronici; il che è manifesto, perchè ogni numero cubico è il prodotto della radice nel suo quadrato; e la radice, e il quadrato costituiscono appunto il numero pronico; e niente meno si verifica, che il quadrato meno la radice è numero pronico. Dunque

Teorema VII. *Un numero può esser summa di due tronchi della serie naturale de' numeri cubici.*

Sia proposto il numero 216. Questo è il cubo della radice 6; e però per le cose dette di sopra, come summa di se medesimo, è tronco della serie; poichè li due numeri, che lo producono, sono 6.36, la summa de' quali 42 è numero pronico, e la differenza 30 è tuttavia numero pronico. Si trovino altri due numeri, che l'un per l'altro dividano il 216, quali sono 8.27; ma la loro somma 35, e la differenza 19 non sono pronici: dunque inutili. Di nuovo il 12 divide il 216 per 18; e la summa 30, e la differenza 6 sono pronici, le radici de' quali sono 2, e 5: dunque il proposto numero 216 è anche la summa del tronco, che ha tre numeri cubici in serie naturale, le radici de' quali sono 3, 4, 5, come si vede in figura; e però il numero 216 è summa di due tronchi della serie naturale de' numeri cubici.

$$\begin{aligned} 3^3 &= 27 \\ 4^3 &= 64 \\ 5^3 &= 125 \\ \hline & 216 \end{aligned}$$

Teorema. *Il numero infinito non si accresce con aggiungervi un numero finito.*

Sia il numero infinito $\frac{1}{1-1}$; e il numero finito sia 3: dico, che $\frac{1}{1-1}+3$ non è maggiore di $\frac{1}{1-1}$.

Imperciocchè si riduca il numero finito 3 sotto il medesimo denominatore $1-1$, e si avrà $3 = \frac{3-3}{1-1}$; cosicchè il numero infinito accresciuto del numero finito sia $\frac{1}{1-1}+3 = \frac{1+3-3}{1-1}$; ma è $3-3=0$: dunque sarà $\frac{1+3-3}{1-1} = \frac{1+0}{1-1} = \frac{1}{1-1}$; per la qual cosa $\frac{1}{1-1}+3$ non è maggior di $\frac{1}{1-1}$; e però il numero infinito non si accresce con aggiungervi un numero finito. Il che si dovea Dimostrare.

Dimanda. Che l'unità sia l'ultimo termine d'una serie infinita di frazioni, di cui li numeratori un dopo l'altro incomincino dall'unità, e li denominatori dal numero 2; e procedono continuatamente in infinito nella serie de' numeri naturali; cosicchè si abbia $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \frac{9}{10}, \frac{10}{11}, \frac{11}{12} \ldots\ldots 1$.

22 Xbre 1780. Ora 14.

Serie di alcuni pensieri, che hanno presentato alla mente la scoperta d'un piccolo nuovo Teorema.

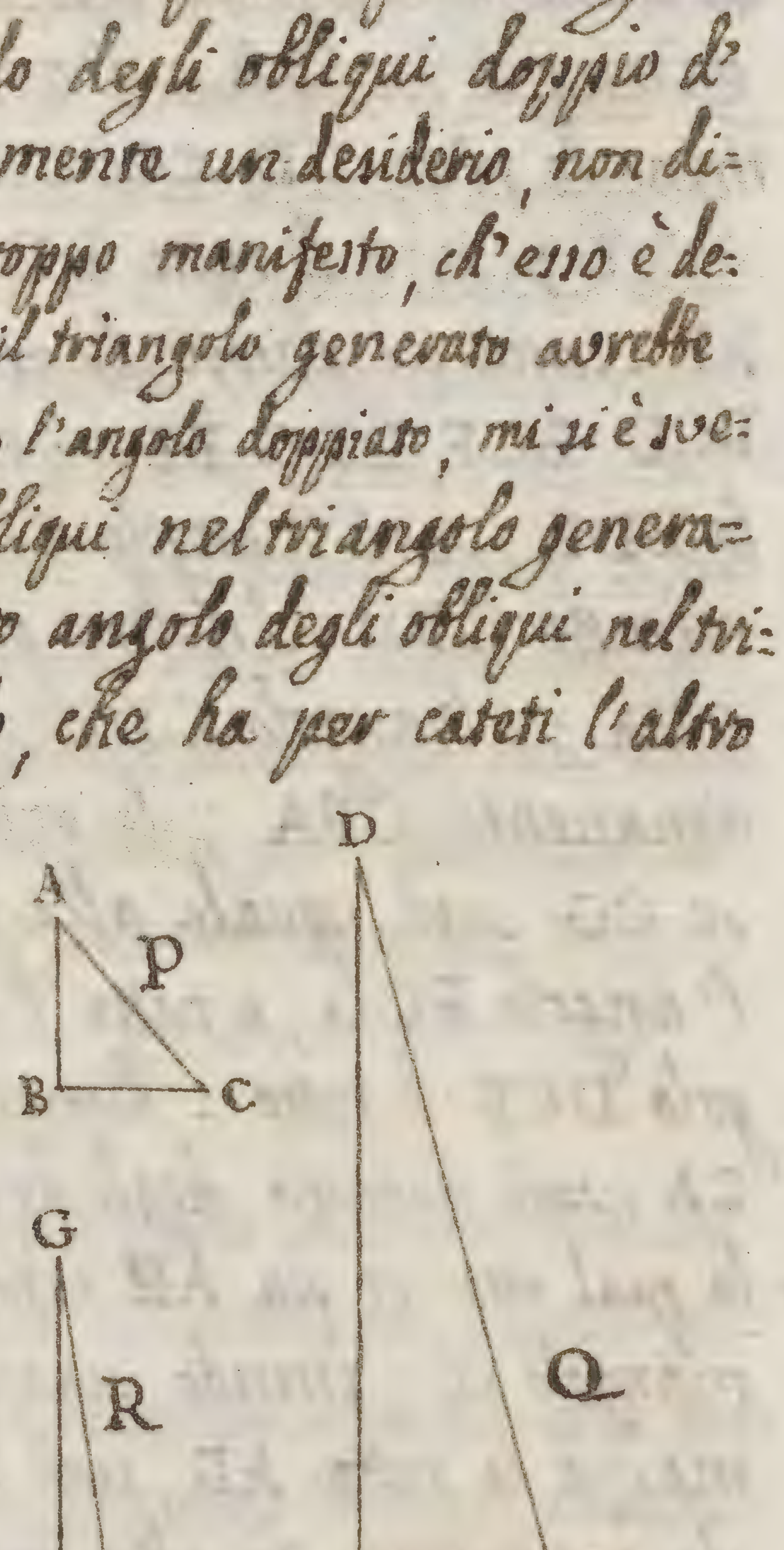
EVOE! Plurima in apricum mea protulit Arbor,
Omnia, quæ in numeris sunt recta, triangula gignens.

Due numeri presi ad arbitrio possono sempre costituire un triangolo rettangolo numerico, di cui perciò si possono anche dire li generatori. Questa verità è palese al mio intelletto fin dalla gioventù. Il metodo assai noto di formar il triangolo consiste in far li quadrati delli due numeri, e in farne anche il numero piano, cioè il loro prodotto col moltiplicarli fra di se; poichè il numero piano raddoppiato costituisce un cateto, la differenza de' quadrati costituisce l'altro cateto, e la ipotenusa nasce dalla summa di ambedue li quadrati. Se i numeri tolti ad arbitrio sono fra di se composti, è manifesto, che i lati del triangolo, che uscirà, saranno fra di se composti, e il triangolo avrà luogo solamente in quella Genesi, che deriverà dal quadrato di quel numero, che sarà maggior misura comune dei generatori. Se poi li numeri siano fra di se primi: quando uno sia pari, e l'altro dispari, il triangolo è fuor d'ogni dubbio nella Genesi de' triangoli dall'unità; ma quando sono fra di se primi, e dispari ambedue, appartengono tutti alla Genesi de' triangoli che hanno la radice nel numero 2; i quali poi dimezzando i lati, si riducono alla Genesi che ha l'origine dall'unità. La scoperta di generar tutti li triangoli rettangoli in numeri si presentò alla mia mente con sommo diletto dell'animo mio sin dall'anno 1751.

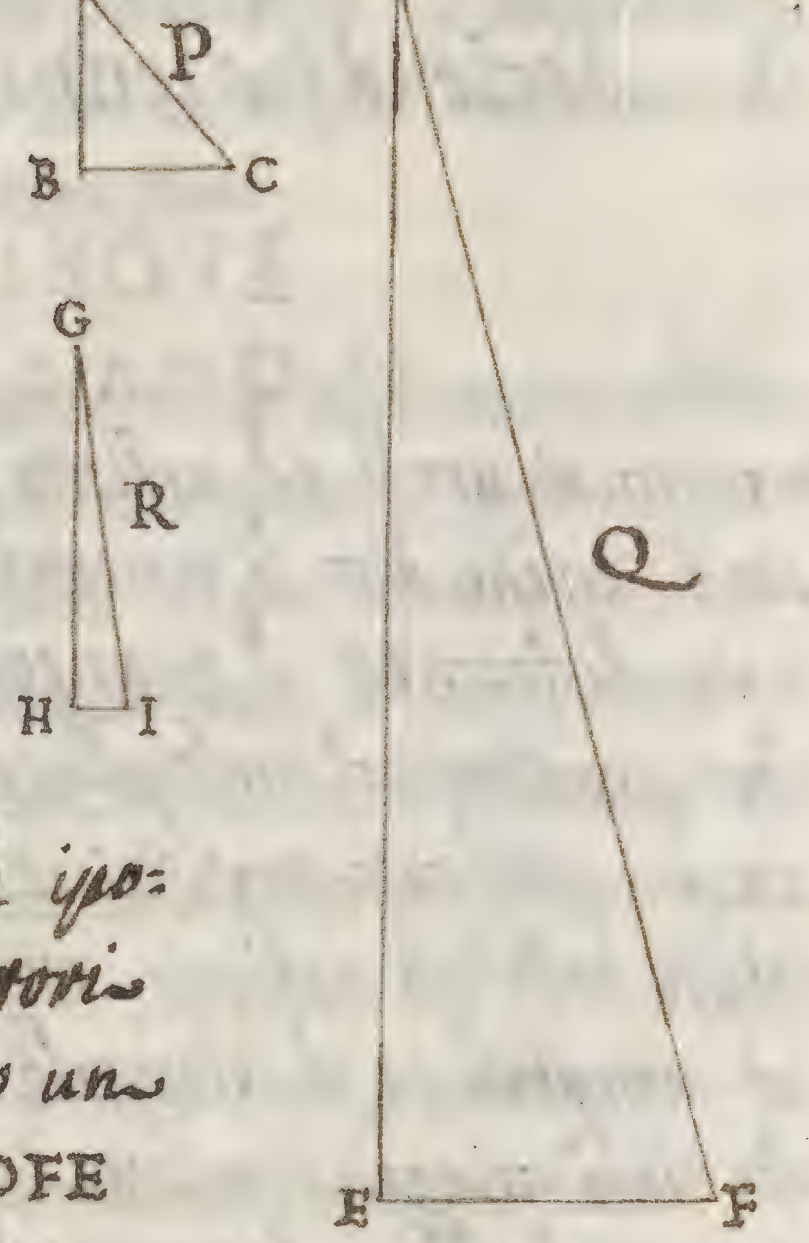
Qui dunque si manifestò apertamente, come due paja di generatori possono costituire un medesimo triangolo; perchè sebbene quelli, che sono dispari, lo fanno di lati doppj, cioè misurati dal 2: pure perchè nella spezie il triangolo non diversifica da quello che ha i lati dimezzati, li due triangoli sono realmente un medesimo triangolo. In qual maniera poi dato un pajo di generatori si possa trovar l'altro, si è da me fatto palese col Problema III descritto nel Grand'Albero della Genesi dall'unità, sono incirca nove anni; poichè dati due generatori fra di se primi, uno pari, e l'altro dispari, o viceversa uno dispari, e l'altro pari: la loro somma, e la loro differenza costituiscono l'altro pajo di generatori, che si cerca; e se tuttavia essendo primi, siano dispari ambedue: la loro somma, e la loro differenza dimezzate costituiscono gli altri due generatori richiesti, in maniera che gli uni dipendono dagli altri reciprocamente.

Ma dopochè nell'anno corrente 1780 ho scoperto il Teorema nuovo, e per verità ancora elegante, descritto in libro Farragine Matematica C alla pag. 64; voglio dire, che se due cateti di qualunque triangolo siano presi per generatori d'un altro, il triangolo generato ha sempre un angolo degli obliqui doppio d'uno degli angoli obliqui del primo: dopo alquanti giorni mi si è svegliato nella mente un desiderio, non dirò di conoscere, qual sia l'angolo, che del primo triangolo si doppia nel secondo, essendo troppo manifesto, ch'esso è degli obbliqui il minore; mentre doppiandosi il maggiore, siccome diverrebbe maggior del retto, il triangolo generato avrebbe due angoli maggiori di due retti, assurdo veramente assai grande: dunque conosciuto qual sia l'angolo doppiato, mi si è svegliato nella mente un desiderio d'intendere, di qual angolo sia doppio l'altro angolo degli obliqui nel triangolo generato. E qui per una semplice natural conghiettura pochi giorni fa ho arguito, che l'altro angolo degli obliqui nel triangolo generato possa esser doppio del minor angolo degli obliqui nel triangolo rettangolo, che ha per cateti l'altro pajo di generatori.

Affinchè però di quanto ho detto si possa formare un'idea adeguata, metterò sotto l'occhio un esempio con le sue figure; per la prima delle quali si tolga della Genesi dall'unità il primo triangolo $\frac{4:3}{5}$, *e si costruisca in* P, *facendo* AB = 4, BC = 3, AC = 5. *Li due cateti 4, 3 siano li due generatori d'un altro triangolo; e però secondo ciò che si è detto* $\frac{2.4.3 : 4^2-3^2}{4^2+3^2}$, *cioè* $\frac{24:7}{25}$ *sarà il triangolo generato, e sia quello descritto in* Q; *facendo* DE = 24, EF = 7, DE = 25. *Il triangolo dunque* Q *ha uno degli angoli obliqui doppio dell'angolo obliquo minore del triangolo* P; *ma l'angolo obliquo minore nel triangolo* P *è l'angolo* BAC, *perchè il cateto* BC *è minore del cateto* AB: *dunque il triangolo* Q *ha un angolo doppio dell'angolo* BAC. *Se ora mi si dimanda, qual de' due* EDF DFE *sia l'angolo doppio dell'angolo* BAC: *rispondo, che essendo la ragione del cateto* AB (4) *al cateto* BC (3) *minore di quella del cateto* DE (24) *al cateto* EF (7), *l'angolo* DFE *è doppio dell'ang.º* BAC.



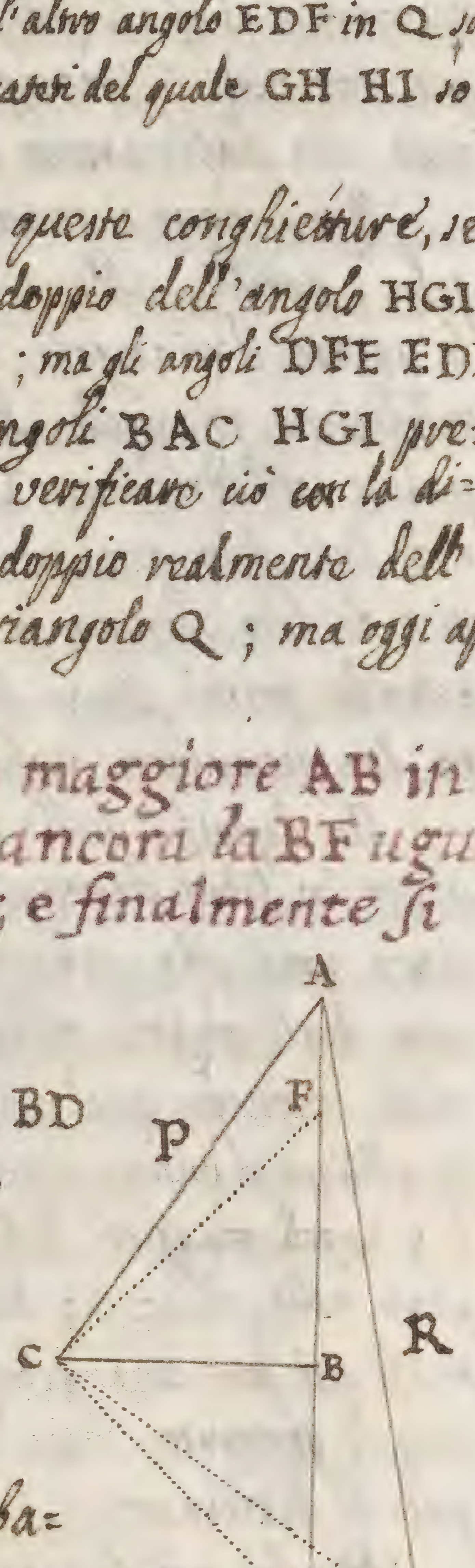
Rimane ora a seconda del desiderio, che ho detto, investigare nel triangolo Q, di qual angolo sia doppio l' altro angolo degli obliqui EDF; e comecchè superiormente ho anche detto, che ogni triangolo ha due paja di generatori: ripeto esser molto verisimile, che se dall' altro pajo de' generatori del triangolo Q si costruisca come cateti un triangolo rettangolo R, abbia esso ad aver in se quell' angolo, di cui si parla, giacchè egli pure quel triangolo non può non esser partecipe della proprietà teorematica di raddoppiar il di lui angolo minore degli obliqui in quel triangolo, nella costruzione del quale sono in funzione li suoi cateti. La retta GH si uguagli dunque alle due rette AB BC; e la retta HI sia uguale alla loro differenza; e poste ambedue ad angoli retti fra di se, si tiri la ipotenusa GI: questo sarà quel triangolo rettangolo, li di cui cateti presi per generatori costituendo il medesimo triangolo Q, quando ne siano dimezzati i lati, farà in esso un angolo degli obliqui doppio dell'angolo minore obliquo HGI; ma l'angolo maggiore DFE in Q si è veduto doppio dell' angolo BAC in P: dunque l' angolo EDF minore in Q sarà quello, che deve esser doppio dell' angolo HGI in R, minore dell' angolo BAC in P; avvegnachè per costruzione la ragion di AB (4) a BC (3) sia minore della ragione di GH (7) ad HI (1); e però l'altro angolo EDF in Q sarà quello degli obliqui, che sarà doppio dell' angolo HGI minore degli obliqui del triangolo R, li cateti del quale GH HI sono l' altro pajo di generatori del triangolo Q.



Finalmente seguendo le tracce di questo discorso ho detto fra me, che supposte vere queste conghietture, se ne deve ritrarre, che essendo l'angolo DFE doppio dell'angolo BAC, e l' angolo EDF doppio dell'angolo HGI: li due angoli DFE EDF presi insieme saranno doppj degli angoli BAC HGI presi insieme; ma gli angoli DFE EDF presi insieme sono uguali ad un retto, avvegnachè l' angolo E è retto: dunque gli angoli BAC HGI presi insieme saranno uguali alla metà d' un retto. Inoltre ho detto, che se avvenga di verificare ciò con la dimostrazione, sarà dimostrato ad un tempo, che nel triangolo Q l' angolo EDF è doppio realmente dell' angolo HGI nel triangolo R, li cateti del quale sono l'altro pajo di generatori del triangolo Q; ma oggi appunto essendosi ciò dimostrato ecco il piccolo nuovo

Teorema. *Se d'un triangolo ABC rettangolo in B si prolunghi il cateto maggiore AB in D in modo, che la BD sia uguale al cateto minore BC; e fatta poi ancora la BF uguale alla BC, si tiri la DG ad angoli retti alla AD, e uguale alla FA; e finalmente si giunga la GA: l'angolo CAG sarà sempre la metà d'un retto.*

Si tirino le rette CD CG CF; e la GD si prolunghi comunque in E.

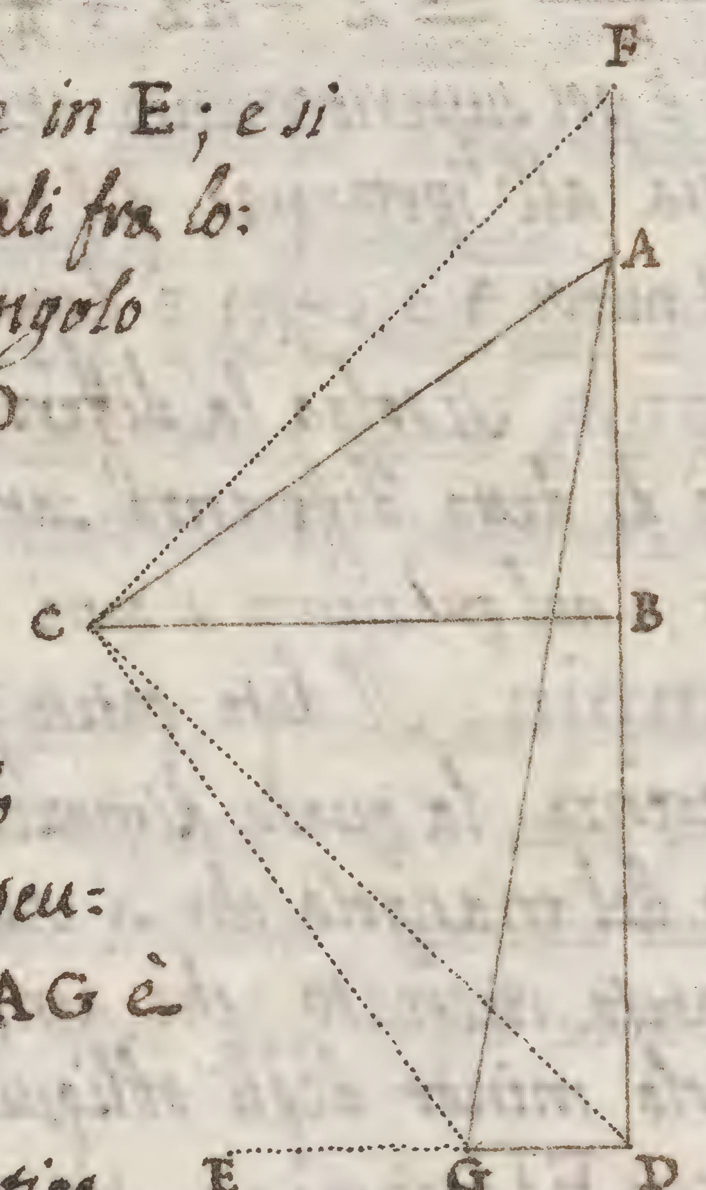


E perchè le rette BD BC BF sono fra di se uguali, e la BC ad angoli retti alle BD BF: saranno ancora le rette CD CF uguali fra di se; saranno semiretti gli angoli BCD BCF BDC BFC; e retto tutto l' angolo DCF. Essendo poi retto anche l' angolo BDE, sarà l' angolo CDE la metà d' un retto, e per conseguenza uguale al semiretto CFD. Inoltre poichè gli angoli CDE CDG sono uguali agli angoli CFD CFA; e l' angolo CDE uguale all' angolo CFD: sarà il rimanente CDG uguale al rimanente CFA; le rette poi DG DC sono uguali alle rette AF FC: dunque la base CG sarà uguale alla CA, e l' angolo DCG all' angolo FCA. Pongasi comune l' angolo FCG, e tutto l' angolo DCF sarà uguale a tutto l'angolo GCA; ma l'angolo DCF è retto: dunque retto parimenti è l' angolo GCA. Essendo poi anche il lato CG uguale al lato CA, sarà ciascuno degli angoli alla base la metà d'un retto: dunque l' angolo CAG è la metà d'un retto.

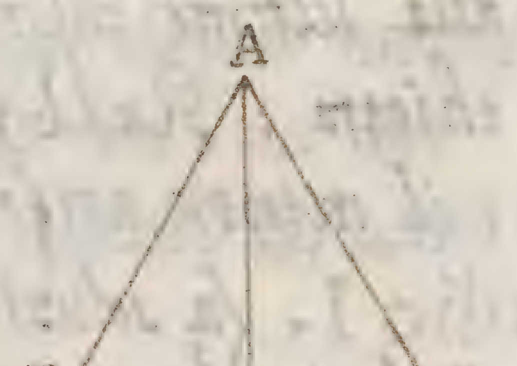
Per la qual cosa se sia AB cateto maggiore, e BC cateto minore d'un triangolo P, e siano ambedue generatori d'un triangolo Q; essendo ciascuna delle rette BD BF uguali al cateto minore: tutta la retta AD sarà la summa, e la retta AF, cioè la DG la differenza dei cateti del triangolo P; e conseguentemente li due cateti AD DG, che costituiscono un altro triangolo R saranno l'altro pajo di generatori dello stesso triangolo Q; ed essendosi dimostrato, che li due angoli BAC DAG, ^nei triangoli fatti^ contenuti dalle due paja di generatori del triangolo Q, fanno insieme la metà d' un retto: uno degli angoli del triangolo Q sarà doppio dell'angolo BAC in P, e l'altro sarà doppio dell'angolo DAG in R; onde siensi mostrate veraci le conghietture, che l' altro angolo d' un triangolo rettangolo sia quello, che si doppia dal secondo pajo di generatori, come si era proposto di verificare.

Continuazione. *Ma avendo considerato posteriormente che se l'angolo minor degli obliqui di quel triangolo, che ha per cateti il secondo pajo di generatori, aggiunto all'angolo minor degli obliqui dell'altro triangolo, che ha per cateti li generatori primi, sempre costituisce la metà d'un angolo retto; facilmente accederà, che sottratto l'angolo stesso di quel triangolo dall'angolo maggior degli obliqui di questo secondo nulla meno sarà costituita la metà d'un angolo retto: fatto sopra di ciò un conveniente esame, ecco un altro facile, e nuovo*

Teorema II. *Se d'un triangolo ABC rettangolo in B si prolunghi il cateto minore AB in modo, che le BD BF siano uguali ciascuna al cateto maggiore BC; e tirata la DG ad angoli retti alla DA, ed uguale alla AF, si giunga la AG: l'angolo CAG sarà sempre la metà d'un retto.*



Imperciocchè si tirino come prima le rette CD CG CF, e la DG si prolunghi comunque in E; e si dimostrerà similmente come nel precedente Teorema, che le rette CD CF sono uguali fra loro; che sono semiretti tutti gli angoli BCD BCF BDC BFC CDE; e che tutto l'angolo DCF è retto; ma sono ancora fra di se uguali le rette FA DG: dunque le due GD DC sono uguali alle due AF FC; e l'angolo GDC è uguale all'angolo AFC; e però la base CG sarà uguale alla base CA, e l'angolo DCG uguale all'angolo FCA. Pongasi comune l'angolo ACD, e tutto l'angolo FCD sarà uguale a tutto l'angolo ACG; ma l'angolo FCD è retto: dunque è parimenti retto l'angolo ACG. Finalmente essendosi dimostrato il lato CA uguale al lato CG: sarà ciascuno degli angoli alla base CAG CGA la metà d'un retto. Dunque l'angolo CAG è la metà d'un retto, come si dovea dimostrare.



Fenomeno. *Succeduto ai passati un altro pensiero, ho voluto subito metterlo in pratica senza punto considerarlo prima, come ragione il volea; e consiste in tirar la perpendicolare AD nel triangolo equilatero ABC, il di cui lato AB, ovvero BC sia il numero 2, e per cui è manifesto, ch'essa lo divide per mezzo in due triangoli rettangoli, ciascun de' quali, come ABD ha l'unità per il cateto BD, e per l'altro AD ha* $\sqrt{3}$. *Consiste inoltre, che desideroso di vedere, qual triangolo si generi da questi due cateti, il quale abbia l'angolo doppio dell'angolo minore BAD: ho fatto il numero piano, ovvero il prodotto* $1\cdot\sqrt{3} = \sqrt{3}$ *delli due cateti fra di se moltiplicati, e poi l'ho raddoppiato per aver un cateto* $2\sqrt{3}$ *del triangolo, che si genera; ho fatti in seguito li quadrati 3, 1 dei cateti medesimi, e per l'altro cateto e l'ipotenusa ho avuto* $3-1 = 2$, *e* $3+1 = 4$; *i quali essendo divisibili per 2 tutti e tre: ecco il fenomeno, cioè perchè il triangolo generato* $\sqrt{3} : 2 : 1$ *è il triangolo stesso generatore ABD. Da ciò pertanto colto inaspettatamente il pensiero si è tosto applicato ad esaminare, qual fosse nel triangolo generato ABD l'angolo doppio dell'angolo minore BAD nel triangolo generante; nè vi ha voluto gran fatto a conoscerlo, avvegnachè non poteva essere che l'angolo ABD. E per verità nel triangolo equilatero l'angolo BAC è uguale all'angolo ABC, o si voglia dire ABD; ma l'angolo BAC è doppio dell'angolo BAD: dunque l'ang.o ABD è doppio dell'angolo BAD: dunque dal triangolo generatore non dovea, nè potea generarsi altro triangolo che se medesimo; mentre niun altro che il solo triangolo rettangolo metà d'un triangolo equilatero può aver negli obliqui un angolo doppio dell'altro. Dunque ecco pronto alla mente per esercizio di studio il seguente Problema da risolversi per simboli, per osservar se coincide con quanto ho detto.*

Problema. *Trovar un triangolo rettangolo, li cateti del quale siano generatori di lui medesimo.*

Sia x *un cateto, e l'altro* y, *ambedue del triangolo, che si cerca; e secondo ciò, che si è fatto più volte, li cateti del triangolo da generarsi saranno* $2xy$, x^2-y^2; *ma li cateti* x, y *devono generare il triangolo, di cui eglino sono li cateti: dunque si avranno le due equazioni* $2xy = x$, $x^2-y^2 = y$. *Operando intorno alla prima, col divider l'equazione per* x *si trova* $2y = 1$, *e per conseguenza* $y = \frac{1}{2}$. *Operando intorno alla seconda, col far subito la sostituzione si ha* $x^2 - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$; *e trasponendo si ottiene* $x^2 = \frac{3}{4}$, *da cui finalmente estraendo la radice, si manifesta* $x = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. *Dunque li due cateti del triangolo ricercato sono* $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\frac{1}{2}$; *ma gli ugualmente moltiplici hanno fra di se la medesima ragione delle loro parti per la prop. 15 del lib. 5: dunque levando le frazioni col raddoppiar i valori, li due cateti del triangolo richiesto saranno* $\sqrt{3}$, 1, *cioè la perpendicolar d'un triangolo equilatero, e la metà del suo lato; il tutto conforme al fenomeno manifestatosi a caso di sopra.*

Problema II. *Dati li due cateti d'un triangolo rettangolo, trovarne un altro, in cui un angolo degli obliqui sia la metà d'uno degli obliqui di quello.*

Siano m, n li cateti del triangolo dato, ed x, z siano li cateti del triangolo, che si cerca; nel quale dovendo un angolo esser la metà d'uno di quelli del triangolo dato: è manifesto, che il triangolo dato avrà un angolo doppio del minor degli obliqui del triangolo, che si cerca; e che per conseguenza il cateto $2xz$ sarà uguale al cateto m, e l'altro cateto x^2-z^2 sarà uguale all'altro n. La prima equazione esibisce tosto $x=\frac{m}{2z}$, che sostituito nella seconda, essa diventa $\frac{m^2}{4z^2}-z^2=n$; intorno alla quale operando, si trova prima $m^2=4z^4+4nz^2$, cioè una biquadratica, che deriva dal secondo grado; cosicchè proseguendo si abbia $\frac{m^2+n^2}{4}=z^4+nz^2+\frac{n^2}{4}$; indi si trovi $\frac{\sqrt{(m^2+n^2)}-n}{2}=z^2$; e per fine si conchiuda $\sqrt{\frac{\sqrt{(m^2+n^2)}-n}{2}}=z$. Si è poi superiormente veduto $x=\frac{m}{2z}$: dunque si avrà $x=\frac{m}{\sqrt{(2\sqrt{m^2+n^2}-2n)}}$. Ma $\sqrt{(m^2+n^2)}$ si uguaglia all'ipotenusa del triangolo: e però se questa si dica c, si conseguirà $x=\frac{m}{\sqrt{2(c-n)}}$, e $z=\sqrt{\frac{c-n}{2}}$; ma di nuovo $\sqrt{2(c-n)}$ è doppia di $\sqrt{\frac{c-n}{2}}$: dunque si ritragga il seguente

Canone. Si tolga la differenza del cateto dispari dall'ipotenusa del triangolo dato; e la radice quadrata della metà di detta differenza sarà un cateto del triangolo, che si cerca. Questo cateto raddoppiato divida il cateto pari, e nel quoziente si avrà l'altro cateto richiesto.

Esempio. Il dato cateto pari sia 24, 7 il cateto dispari, 25 l'ipotenusa; e tolto il 7 dal 25, sarà 18 la differenza, la quale dimezzata esibisce il quadrato 9, che ha 3 di radice. Dunque il numero 3 è un cateto del triangolo, che si vuole. Il 6 doppio del 3 divida il dato cateto pari 24, e il quoziente 4 sarà l'altro cateto ricercato, che ambedue hanno il 5 di ipotenusa, cosicchè tutto il triangolo $\frac{4:3}{5}$ sia quello in cui l'angolo minor degli obliqui è uguale alla metà d'un angolo degli obliqui del dato triangolo $\frac{24:7}{25}$.

Altro Esempio. Sia 336 il noto cateto pari, il dispari 527, l'ipotenusa 625; e la differenza di questi due ultimi numeri sarà 98, che dimezzata, e cavata la radice offre il 7 per un cateto del triangolo richiesto. Raddoppiato il 7, il 14 divida il cateto pari 336; e nel quoziente 24 si trova l'altro cateto; e il minor angolo degli obliqui del triangolo $\frac{24:7}{25}$ è la metà d'un obliquo nel triangolo dato $\frac{336:527}{625}$.

Scolio I. La soluzione di questo secondo Problema è buona solamente in què triangoli rettangoli, di cui le Genesi derivano da numeri quadrati. Ma comechè tutti li triangoli rettangoli dall'unità punto non differiscono nella spezie dai triangoli rettangoli da qualunque altro numero; avvegnachè i lati di questi non sieno che multipli dei lati di quelli, come già ho avvertito nella Genesi dall'unità: così la soluzione soprascritta serve eziandio per qualunque triangolo rettangolo dato, quella volta che i suoi lati siano prima ridotti a termini minimi; la qual cosa è dell'ultima facilità, essendo operazione scolastica. Si deve però fare un'osservazione, che se un triangolo dato derivi dalla Genesi d'un quadrato, il triangolo ricercato, che ne uscirà, non deriverà dalla stessa Genesi, ma da un'altra, che avrà per origine la radice del quadrato di quella; cosicchè i lati del triangolo dato ai lati del triangolo ritrovato si corrispondono in ragione del quadrato alla sua radice.

Esempio. Per farne prova: I lati del triangolo adoperato di sopra $\frac{24:7}{25}$ siano moltiplicati dal 9 quadrato di 3 che gli riduca a formar per triangolo dato il multiplo $\frac{216:63}{225}$. Secondo il Canone, sottratto il 63 da 225, si ha la differenza 162, la di cui metà 81 è numero quadrato, che ha il 9 di radice, e che è un cateto del triangolo che si cerca. Raddoppiato il cateto 9, il suo doppio 18 divida il cateto 216, e il quoziente 12 è l'altro cateto, onde sia 15 la ipotenusa. Dunque essendo $\frac{216:63}{225}$ il triangolo dato, e $\frac{12:9}{15}$ il triangolo ritrovato: ecco la ragione 9:3 dei lati del primo ai lati del secondo, cioè come il quadrato alla sua radice.

Scolio II. Senonchè due essendo in ogni triangolo rettangolo gli angoli obliqui, la mente non s'acquieta se dato un triangolo rettangolo qualunque, di cui abbia già ritrovato il suo corrispondente triangolo, nel quale un angolo sia la metà d'uno de' suoi, cioè d'uno di quelli del dato triangolo: dissi, che la mente non s'acquieta, se non trova anche l'altro triangolo, che abbia in se un angolo metà dell'angolo rimanente del triangolo dato. Nel primo esempio, proposto il triangolo rettangolo $\frac{24:7}{25}$, si è ritrovato il triangolo rettangolo $\frac{4:3}{5}$, in cui l'angolo compreso dal cateto maggiore 4, e dall'ipotenusa 5, cioè l'angolo minor degli obliqui, è la metà dell'angolo compreso dal cateto minore 7, e dall'ipotenusa 25, cioè dell'angolo maggior obliquo: adesso dunque ragion vuole, che si cerchi l'altro triangolo rettangolo, in cui l'angolo compreso dall'ipotenusa, e dal cateto maggior sia la metà di quello che nel triangolo dato è compreso dall'ipotenusa 25 e dal cateto maggior 24, cioè dall'angolo minor obliquo nel triangolo $\frac{24:7}{25}$; del che essendo anche più semplice la soluzione, mentre è quella stessa di trovar il se-

condo pajo di generatori del dato triangolo $^{24:7}_{25}$, siccome quella del Problema 2°. è la medesima di ritrovarne il pajo primo: così senza la formalità di proporre un terzo Problema, onde fare altre operazioni simboliche, ecco di detta soluzione il suo

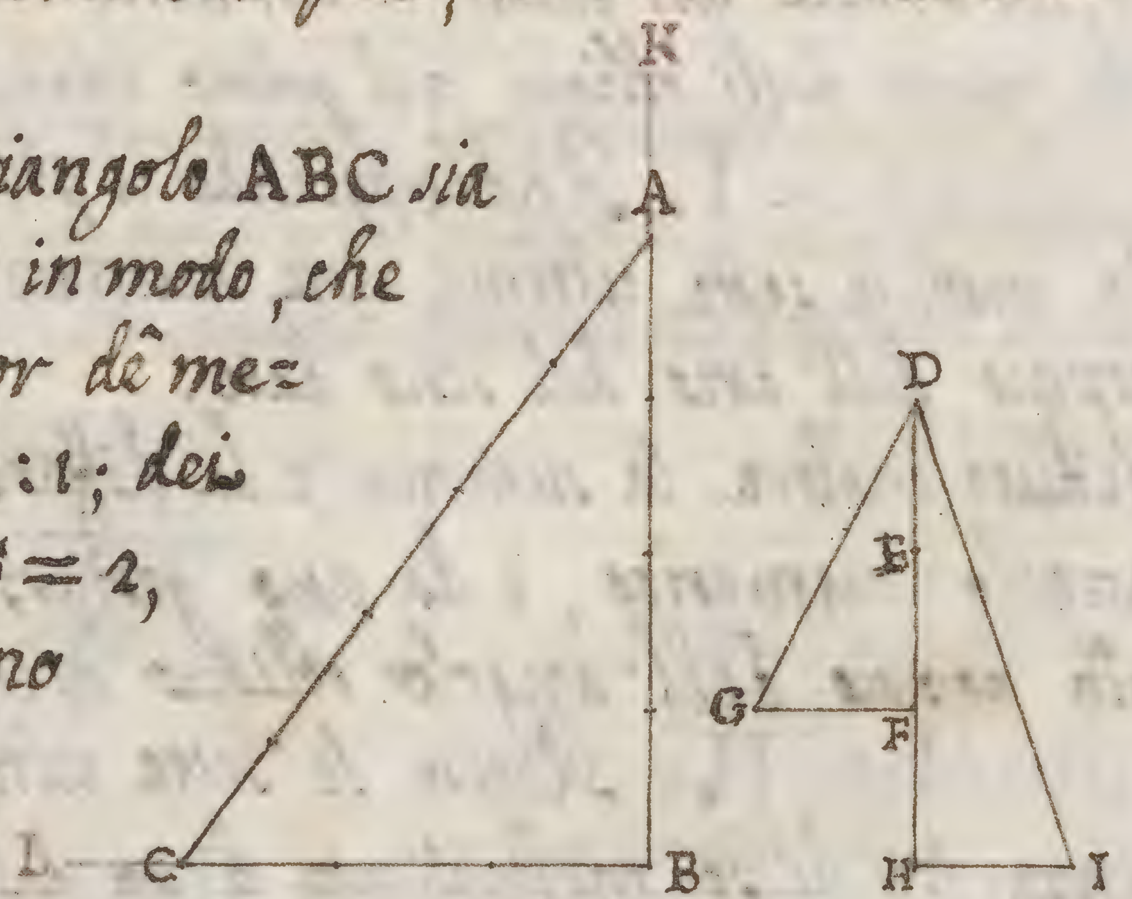
Canone II. Il cateto pari sottratto dall' ipotenusa dà per differenza un numero quadrato, la di cui radice è un numero, che si cerca, cioè un cateto. Questo divida l'altro cateto dispari del triangolo dato, e nel quoziente si avrà il secondo cateto, che si cerca.

Osservazione. Perchè ogni triangolo rettangolo dall' unità ha necessariamente un cateto pari, e un cateto dispari, e dispari ancora l' ipotenusa: per legge del primo canone uno de' generatori del primo pajo sarà pari e l'altro dispari; e se questi siano costituiti cateti d' un triangolo, la loro ipotenusa ora sarà razionale, ora irrazionale. Per legge poi del canone secondo escono dispari ambedue li generatori dell' altro pajo; e costituiti come cateti d' un triangolo, sempre avranno irrazionale l' ipotenusa.

Oltre a ciò perchè tutti li triangoli rettangoli di Genesi da altri numeri hanno i lati multipli di quelli, che derivano dall' unità, è manifesto, che se li generatori di essi siano presi come cateti d' un triangolo, procederanno similmente con le loro ipotenuse rispetto a quelle della Genesi dall' unità, parte razionali, e parte nò quelle del primo pajo; e quelle del secondo tutte irrazionali.

Esempio. Dato il triangolo $^{24:7}_{25}$, e sottratta l' ipotenusa dal cateto pari, si ha la differenza 1 numero quadrato, la di cui radice 1 è un generatore del secondo pajo. La radice 1 dividendo il 7 cateto dispari, dà l' altro generatore nel quoziente 7, e sono ambedue numeri dispari, e la loro ipotenusa $\sqrt{50}$, come si è detto; cosicchè nel triangolo rettangolo $^{1:7}_{\sqrt{50}}$ l' angolo compreso dall' ipotenusa $\sqrt{50}$ e dal 7 maggior cateto sia la metà dell' angolo compreso dall' ipotenusa 25, e dal cateto maggior 24 nel triangolo $^{24:7}_{25}$.

Altro Esempio. Proposto il triangolo $^{336:527}_{625}$, la sottrazione 625–336 dà il quadrato 289, che ha 17 di radice, ed è un generatore del secondo pajo. La radice fa la divisione $\frac{527}{17}$, e comparisce 31 altro generator del pajo medesimo, ambedue dispari similmente; e $\sqrt{1250}$ è la loro ipotenusa. Dunque il triangolo ritrovato $^{17:31}_{\sqrt{1250}}$ con li due lati 31, $\sqrt{1250}$, cioè col cateto maggior, e con l' ipotenusa contiene un angolo, che è la metà di quello, che si contiene dal cateto minor 336 e dall' ipotenusa 625 nel triangolo proposto $^{336:527}_{625}$.

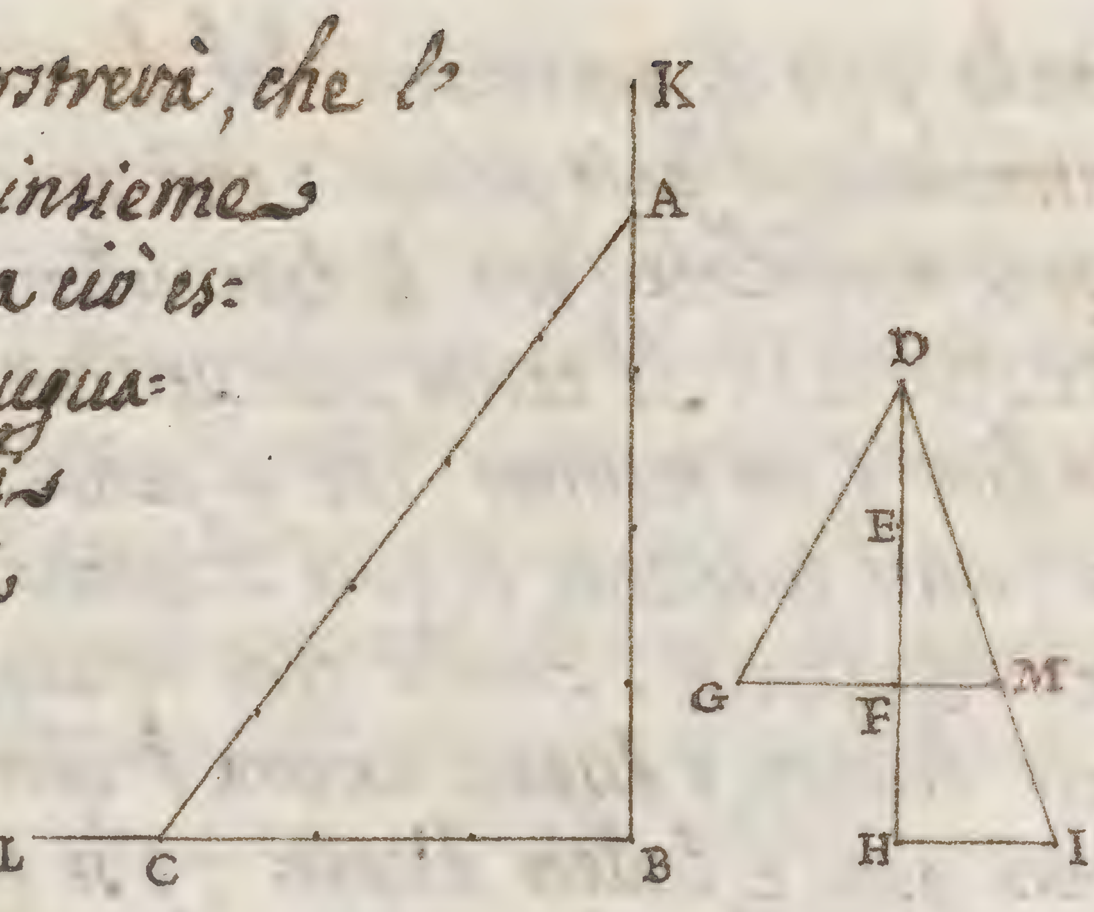


EPITOME di ciò, che si è proposto da principio. Il triangolo ABC sia $^{4:3}_{5}$ il primo nella Genesi dall' unità; e sia AB = 4, BC = 3, AC = 5 in modo, che l' angolo ABC sarà retto, l' angolo ACB maggior degli obliqui, e il minor de' medesimi sarà il rimanente BAC. Li generatori del primo pajo sono 2:1; dei quali, essendo costituiti come due cateti d' un triangolo rettangolo, cioè DF = 2, FG = 1, la ipotenusa DG sarà $\sqrt{5}$. Li generatori del secondo pajo sono 3:1, di cui, pure costituiti come altri due cateti d' un altro triangolo, cioè DH = 3, HI = 1, la ipotenusa DI è $\sqrt{10}$; e per le cose dette sin ora, il triangolo rettangolo DFG avrà il minor angolo degli obliqui FDG metà dell' angolo maggior degli obliqui ACB nel triangolo ACB; e il triangolo rettangolo DHI avrà il minor angolo de' suoi obliqui HDI metà dell' angolo minor degli obliqui [redacted] BAC nel triangolo ABC; ma presi insieme li due angoli ACB, BAC del triangolo ABC sono uguali ad un retto, avvegnachè sia retto l' angolo ABC: dunque presi insieme li due angoli FDG HDI, cioè tutto l' angolo GDI sarà la metà d' un retto.

Perchè è poi DF = 2, e DH = 3: sarà FH = 1. Di nuovo perchè è la DF = 2, e la FG = 1, fatta la FE = FG, sarà la rimanente ED = 1; ma è HI = 1, e ad angoli retti alla DH: dunque d' un triangolo DFG rettangolo in F si è prolungato il cateto maggiore DF in H per modo, che la FH è uguale al cateto minore FG; e fatta poi ancora la FE uguale alla FG, si è tirata la HI ad angoli retti alla DH, e uguale all' ED; e finalmente si è giunta la ID; per la qual cosa l' angolo GDI sarà la metà d' un retto, come dimostra il primo Teorema; ma si è conosciuto prima ch' esso pure è la metà d' un retto per la unione delli due angoli obliqui minori FDG HDI, i quali sono la metà degli angoli obliqui ACB BAC del triangolo ABC il maggiore del maggiore e il minore del minore: dunque è manifesta la serie de' pensieri, che hanno presentato alla mente la scoperta del piccolo nuovo Teorema proposto, come si dovea fare.

Corollario. Se del triangolo ABC si prolunghino li due cateti BA BC ne' punti K L; essendo manifesto, che gli angoli CAB CAK sono uguali a due retti, e uguali ad un retto gli angoli GDF DGF: saranno questi la metà di quelli; ma l' angolo GDF è la metà dell' angolo CAB: dunque l' angolo rimanente

DGF è la metà dell' angolo rimanente CAK. Similmente si dimostrerà, che l' angolo DIH è la metà dell' angolo ACL; e però li due angoli insieme DGF DIH sono la metà degli angoli insieme CAK ACL. Oltre a ciò essendo gli angoli CAB CAK, ACB ACL uguali a quattro retti, e uguali ad un retto gli angoli CAB ACB: saranno uguali a tre retti gli angoli CAK ACL; ma gli angoli DGF DIH sono la metà degli angoli CAK ACL: dunque gli angoli DGF DIH sono la metà di tre retti, cioè un retto e mezzo.



Analisi Geometrica. *Si conferma, che li due angoli DGF DIH fanno un retto e mezzo.*

Si prolunghi la retta GF sino che seghi la DI nel punto M. E perchè sono uguali ad un retto e mezzo gli angoli DGF DIH, si ponga comune l' angolo semiretto GDI; e li tre angoli DGF DIH GDI saranno uguali a due retti; ma sono uguali a due retti ancora gli angoli DGF DMF GDM, cioè GDI: si traggano li due angoli comuni DGF GDI, e l' angolo rimanente DIH sarà uguale al rimanente DMF. Sono dunque due linee rette FM HI, nelle quali cadendo la retta DMI, fa l' angolo esteriore DMF uguale all' interiore ed opposto, e dalle medesime parti DIH; e però la retta FM sarà parallela alla retta HI; ma la retta FM è parallela alla retta HI, avvegnachè ambedue per costruzione segano ad angoli retti la linea retta DH: dunque li due angoli DGF DIH fanno un retto, e mezzo.

Fenomeni, *che si manifestano, applicando alla Trigonometria li Teoremi premessi.*

E' noto, che il Canone Trigonometrico è costruito in maniera, che il seno, ed il coseno sono due quantità, che si reciprocano relativamente a due archi, che sempre costituiscono un quadrante del cerchio. Per facilità d' esprimermi chiamerò spezialmente *seno* quello, che si riferisce all' arco minore; e *coseno* quello che si riferisce all' arco mag.

Si è veduto, che il prodotto raddoppiato di due cateti d' un triangolo rettangolo numerico, presi come generatori, costituisce un cateto d' un altro triangolo rettangolo numerico, che ha un angolo degli obliqui doppio dell' angolo minor degli obliqui nel primo triangolo. Dunque

Fenomeno I. Raddoppiando il prodotto, che nasce dal moltiplicar un seno dato col suo coseno e togliendo da esso le sette ultime note numeriche, le restanti esprimeranno un altro seno, o coseno d' un arco doppio dell' arco del seno dato.

Si è veduto inoltre la summa e la differenza dei due cateti medesimi costituire li cateti d' un altro triangolo numerico, e da esso generarsi il triangolo di prima, il quale ha l' altro angolo degli obliqui doppio dell' angolo obliquo minore nel triangolo generator. Dunque

Fenomeno II. Recise le sette ultime note numeriche dal prodotto fatto dalla summa e dalla differenza fra di se moltiplicate d' un dato seno, e suo coseno, lascierà viceversa il coseno, o il seno del doppio arco nominato di sopra.

Esempio per il Caso I. L' arco di 11°.19' ha di seno 1962314, e di coseno 9805576, che fra di se moltiplicati fanno il prodotto 19241619062864; e questo raddoppiato diventa 38483238125728; da cui recise le sette ultime note 8125728, il seno dell' arco doppio di 11°.19', cioè il seno di 22°.38' sarà le note rimanenti 3848323, che accresciuto dell' unità, perchè le note recise equivalgono alla frazione $\frac{8125728}{10000000} > \frac{1}{2}$, costituisce il seno preciso 3848324, che si riscontra nelle Tavole.

La somma del seno dato e suo coseno è 11767890; e 7843262 è la differenza; e fatta la moltiplicazione di ambedue, nasce il prodotto 92298644457180; e recise le sette note 4457180, comparisce mancante dell' unità da quel delle Tavole il coseno 9229864 dell' arco raddoppiato, cioè il seno di 67°.22', la metà del quale, cioè 33°.41' summati con li 11°.19' proposti in principio, costituiscono l' arco preciso sotteso all' angolo semiretto, cioè di 45° come esige il Teorema I.

Esempio per il Caso II. Sia dato l' arco di 41°.53', il di cui seno è 6676160, e 7445057 il suo coseno. Il loro prodotto fa il numero 49704391741120, che raddoppiato diventa 99408783482240, che al solito scemato delle sette note ultime 3482240, rimane per coseno il numero 9940878, mancante esso pure men dell' unità da quel delle Tavole, e che ad esso corrisponde l' arco doppio del proposto, cioè 83°.46'.

Allo stesso modo 14121217 è la somma del seno e coseno; e 768897 è la differenza. La loro moltiplicazione dà il prodotto 10857761387649, dal quale tolte le sette note 1387649, rimane difettivo men

dell' unità il seno 1085776 dell' arco doppio di 83°.46'; vale a dire il seno di gr. 6°. 14', la di cui metà 3°.7' unita con li gradi proposti da principio per il secondo Caso, cioè 41°.53', costituisce l'arco sotteso precisamente all' angolo semiretto.

Corollario completivo. Dunque se recise sette note numeriche dal prodotto raddoppiato di un dato seno moltiplicato per il suo coseno si costituisce un altro seno; si costituirà il suo coseno, recise che sieno altrettante note dal prodotto fatto dalla somma, e dalla differenza del seno dato e suo coseno. Se poi con la prima operazione si costituisce un coseno, voglio dire un angolo maggior del semiretto: con la seconda si costituirà un seno, cioè d'un angolo del semiretto minore.

Ogni seno, o coseno può derivar da un prodotto raddoppiato d'un seno, e suo coseno; ovvero da un prodotto della Summa e della Differenza d'un altro seno, e suo coseno. Ma il prodotto raddoppiato di due numeri è lo stesso che il prodotto d'un de' numeri qualsivoglia moltiplicato pel doppio dell' altro: dunque

Fenomeno III. Il doppio seno, ed il suo coseno; ovvero il seno, e il doppio suo coseno sono sempre in ragione reciproca con la summa, e con la differenza d'un altro seno, e suo coseno.

Problema III. Dato un seno, e il suo coseno; e raddoppiato o l'uno, o l'altro: trovar il seno col suo coseno; con la summa, e con la differenza de' quali siano essi in ragione reciproca.

Sia dato il seno 3018153 d'un arco di 17°.34', che ha di coseno 9533664; e raddoppiando il seno, diventa 6036306. Dall' arco 45°. del semiretto si tolga l'arco dato di 17°.34'; e resterà l'arco di 27°.26', che esibisce il seno 4607162 col suo coseno 8875475; la summa de' quali è 13482637; e 4268313 la differenza. Dico, che reciprocamente, cioè il doppio seno 6036306 alla somma 13482637 sta la ragion medesima, che la differenza 4268313 al coseno 9533664. Imperciocchè facendo li prodotti degli estremi, e dei termini medj, si trova in ambedue perfetta uguaglianza, quando però siano recise da l'uno e l'altro le sette ultime note numeriche, secondochè mostrano le soprascritte moltiplicazioni.

9533664
6036306
57201984
28600992
57201984
28600992
57201984
57548113205184

13482637
4268313
175274281
40447911
107861096
80895822
26965274
53930548
5754811.4781381

Corollario. Se dunque due seni appartengano a due archi, i quali presi insieme sottendano un angolo semiretto, sempre si verificherà, che il doppio seno, e il suo coseno d'un arco; la summa, e la differenza del seno, e coseno dell' altro arco sono vicendevolmente quattro termini, che hanno ragione reciproca fra di loro.

Quindi in conseguenza all' antecedente Problema, del seno 3018153 e suo coseno 9533664 di 17°.34' la summa 12551817, la differenza 6515511; il doppio seno di 27°.26', cioè 9214324, e il suo coseno 8875475 comunque ordinati reciprocamente 12551817 : 9214324 :: 8875475 : 6515511 hanno fra di loro la stessa ragione, come non curando parimente le sette ultime note, si fa manifesto con le apposte due moltiplicazioni.

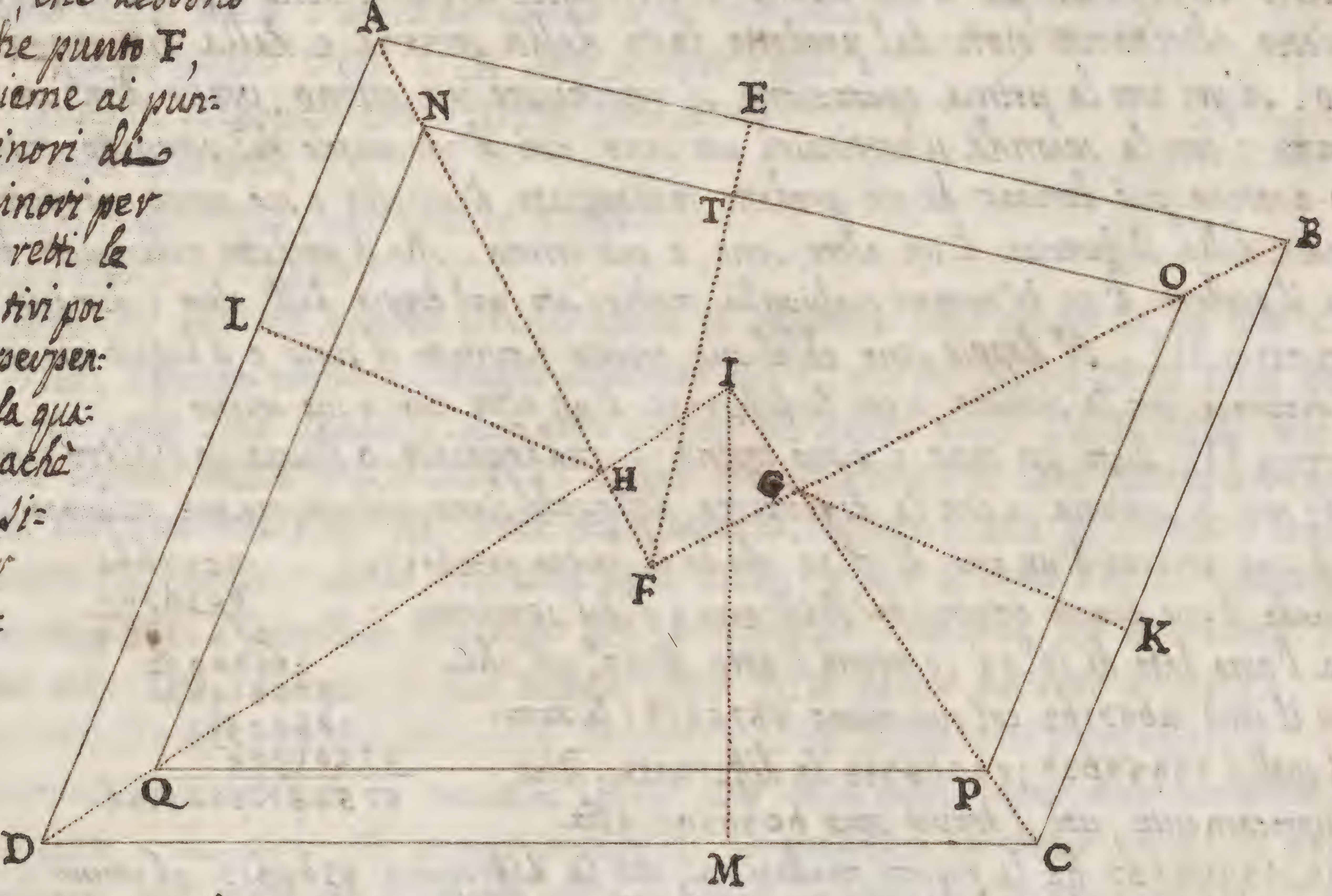
12551817
6515511
138069987
62759085
188277255
62759085
75310902
81781501733487

9214324
8875475
46071620
64500268
36857296
46071620
64500268
73714592
73714592
81781502203900

Fenomeno IV. Se alcuno poi desiando vedere, come operando per logaritmi appaja tosto fedelissimo il logaritmo del seno o coseno dell' angolo doppio d'un angolo dato: sia proposto a cagion d'esempio l'angolo di 7°.49'; e presi li due logaritmi 91335509, 99959458 del seno e coseno del dato angolo, devono unirsi insieme, ma conviene insieme accompagnarli col logaritmo 03010300 del numero 2, com'è manifesto dalle cose più volte replicate; e fatta la summa 194305267, ecco subito comparire un quarto Fenomeno, cioè un logaritmo assai eccedente, e fuori delle Tavole; del quale però è facile la spiegazione. Imperciocchè siccome nei problemi passati dopo fatto il prodotto, e raddoppiato, si sono sempre recise le sette ultime note numeriche, per cui ogni volta si è effettuata una divisione per il numero 10000000: così adoperando i logaritmi è necessario recider la unità, prima nota della summa, cioè sottrar da essa il logaritmo 100000000; e riscontrato poi nelle Tavole il logaritmo 94305267 tra i logaritmi de' seni, o coseni, si troverà quello appunto dell' angolo doppio 15°.38', come dovea necessariamente accadere.

Problema. *In un dato trapezio descriverne un altro, che abbia i suoi lati paralleli ai lati di quello, e d'una medesima distanza, i quali eziandio comprendano uno spazio dato minore.*

Il trapezio dato sia ABCD; e si dividano per mezzo gli angoli ai punti A B dalle rette linee AF BF, le quali è manifesto, che debbono concorrere in qualche punto F, perchè gli angoli insieme ai punti A B essendo minori di quattro retti, sono minori per conseguenza di due retti le loro metà unite. Si tiri poi dal punto F la FE perpendicolare al lato AB, la quale sarà data, avvegnachè sia dato il trapezio. Similmente divisi per mezzo ancora gli angoli ai punti C D da rette linee, le quali concorrano con le AF BF e anche



fra di se nè punti G H I; e da essi tirate le perpendicolari GK HL IM ai lati BC AD DC, elleno pure saranno date. Siano pertanto a b c d i quattro lati AB BC CD DA del dato trapezio, ed m n r t le quattro perpendicolari FE GK IM HL. Perchè poi lo spazio dato è minore del trapezio, sia pq l'eccesso, nel quale il trapezio ABCD supera lo spazio dato; e sia x la distanza delle parallele richieste per la descrizion dell'interno trapezio, le quali tosto si determineranno con le quattro controscritte analogie. Queste parallele con li quattro lati del trapezio si facciano la summa seguente $a+b+c+d+\frac{am-ax}{m}+\frac{bn-bx}{n}+\frac{cr-cx}{r}+\frac{dt-dx}{t}$; la quale moltiplicata per la distanza x, il suo prodotto si uguaglierà al doppio dell'eccesso, cioè a $2pq$: e si avrà l'equazione $ax+bx+cx+dx+\frac{amx-ax^2}{m}+\frac{bnx-bx^2}{n}+\frac{crx-cx^2}{r}+\frac{dtx-dx^2}{t}=2pq$.

$m : a :: m-x : \frac{am-ax}{m}$

$n : b :: n-x : \frac{bn-bx}{n}$

$r : c :: r-x : \frac{cr-cx}{r}$

$t : d :: t-x : \frac{dt-dx}{t}$

Si faccia $a+b+c+d=f$, ed $mnrt=g^4$; e si avrà $2fg^4x-(anrt+bmrt+cmnt+dmnr)x^2=2g^4pq$. Di nuovo il coefficiente $rt(an+bm)+mn(ct+dr)$ si faccia uguale ad h^4, cioè il coefficiente dell'incognita x^2: e poi trasportando, ovvero cambiando i segni, l'equazione diverrà $h^4x^2-2fg^4x=-2pq$; e quinci dividendo per h^4, verrà $x^2-\frac{2fg^4}{h^4}x=-\frac{2pq}{h^4}$, per cui prima si compia il quadrato, di poi si estragga la radice, e finalmente trasportando si conchiuda la soluzione del Problema, cioè $x=\frac{fg^4\pm\sqrt{(-2g^4h^4pq+f^2g^8)}}{h^4}=\frac{fg^4\pm\sqrt{(-2g^4h^4pq+f^2g^8)}}{h^4}$

Fatta dunque la ET uguale al valore trovato dell'incognita x; e per il punto T tirata la NO parallela alla AB, che seghi le FA FB nè punti N O, e per li punti N O le parallele NQ OP parallele alle AD BC che seghino le HD HC nè punti Q P; e finalmente giunta la QP: il trapezio NOPQ sarà uguale allo spazio dato, ed avrà i suoi lati paralleli, e d'una medesima distanza ai lati del dato trapezio ABCD; avvegnachè essendo lo spazio compreso tra le parallele uguale all'eccesso, nel quale il trapezio ABCD ha da superare il trapezio minore: il rimanente trapezio NOPQ sarà necessariamente uguale allo spazio dato.

Esempio. *Il trapezio ABCD ha il lato AB = 61, BC = 43, CD = 65, AD = 57. Ha inoltre la diagonale, che dal punto A si tira al punto C, uguale a 68, per cui il triangolo ABC abbia 1290 di area, e 1710 il triangolo ACD, e facciano ambedue in summa il trapezio ABCD = 3000. Sia 2000 lo spazio minore che deve descriversi in esso con rette linee parallele ai lati con la medesima distanza; e per conseguenza sarà 1000 l'eccesso compreso tra le parallele. Divi-*

si pertanto gli angoli per mezzo da linee rette; e dai punti, ov' esse concorrono tirate le perpendicolari, come si è detto nel Problema, dovrebbono queste esser determinate trigonometricam.te per procedere con esattezza; ma dopochè ciò sarebbe una fatica non meno grande, che lunga: si operi piuttosto meccanicamente facendo uso della Zona, cioè costruendo il trapezio con la scala della medesima in modo, che divisi per mezzo gli angoli, come si è detto, da linee rette; e dai punti del loro concorso tirate le perpendicolari, siano queste determinate con l'ajuto di essa Zona mentre si troverà con una assai conveniente approssimazione e con maggior facilità e brevità, che le perpendicolari FE IM sono accidentalmente uguali, cadauna del valore di parti $29^{\circ}.89''\frac{1}{91}$; GK $= 23^{\circ}.15''\frac{15}{19}$; e HL $= 24^{\circ}.34''\frac{18}{23}$; e trascurando i rotti ultimi generici, si riduca il tutto a decimali seconde, come nella Figura I, nella quale si racchiudono tutti li valori, che necessarj sono per metter in pratica il Problema. Nella Figura II si veggono gli altri, che da quelli sono stati dedotti e sostituiti; cosicchè facendo poi il complesso dei risultati per comporre, quanto esige la formola algebraica, ch' esprime il valor dell' incognita, si trovi in numeri interi con decimali terze $x = ET = \overset{\circ}{4}.865'''$.

AB = a = 6100.
BC = b = 4300.
CD = c = 6500.
AD = d = 5700.
FE = m = 2989.
IM = r = 2989.
GK = n = 2316.
HL = t = 2435.
pq = 10000000.

Figura I.

$a+b+c+d = f = 22600.$ $\quad f^2 = 510760000.$

$mnrt = g^4 = 50383618014660.$

$an = 14127600.$
$bm = 12852700.$
$an+bm = 26980300.$
$ct = 15827500.$
$dr = 17037300.$
$ct+dr = 32864800.$
$rt = 7278215.$
$mn = 6922524.$

$rt(an+bm) = 19636842164500$
$mn(ct+dr) = 22750736755200$
$rt(an+bm)+mn(ct+dr) = 42387579091970 0 = h^4$

$fg^4 = 1138669767131316000$

$g^8 = 2538508964247171677997491 5600$

Figura II.

$$f^2g^8 = 1296568838578885407263987891856000000$$
$$2g^4h^4pq = 427127918707201051389656040000000000$$
$$869440919871684355874331851856000000 = f^2g^8 - 2g^4h^4pq$$

$$\sqrt{(f^2g^8 - 2g^4h^4pq)} = 932438153376235595$$
$$fg^4 = 1138669767131316000$$
$$206231613755080405 = fg^4 - \sqrt{(f^2g^8 - 2g^4h^4pq)}$$

$$\frac{fg^4 - \sqrt{(f^2g^8 - 2g^4h^4pq)}}{h^4} = \frac{206231613755080405}{42387579091970 0} = 4865'''$$

Vengono in seguito anche tutte le operazioni, le quali si è voluto conservare, in quanto che essendo fatte, e alquanto vaste, possono servire di esemplari in qualche occorrenza.

```
  a = 6100          2316              2989            2435             2989
  b = 4300          6100              4300            6500             5700
  c = 6500        231600            896700         1217500          2092300
  d = 5700        13896             11956           14610            14945
f = 22600    an = 14127600     bm = 12852700   ct = 15827500    dr = 17037300
    22600                      an = 14127600                    ct = 15827500
  3560000                  an+bm = 26980300                ct+dr = 32864800
    452                       rt = 7278215                    mn = 6922524
   452                          2183464500                     5538019200
f² = 500760000                 58225720                        27690096
                              65503935                        41535144
                             43669290                        55380192
                            14556430                        13845048
                                                           20767572
  2989      rt(an+bm) = 19636842164500         mn(ct+dr) = 22750736755200
  2435                  2989                   rt(an+bm) = 19636842164500
 14945                  2316                          h⁴ = 42387579091970 0
  8967                 17934
 11956                 2989
 5978                 8967
rt = 7278215          5978
                mn = 6922524
```

2989
2989
26901
239[illegible]
26901
5978
8934121
2316
53604726
8934121
26802363
17868242
20691424236
2435
103457121180
62074272708
82765696944
41382848472
503836180146660 = mnrt = g^4
22600 = f
3023017080879600 0
110843959632252
11386697671313160000 = fg^4

50383618014660
50383618014660
302301708087960 0
30230170808796
20153447205864
50383618014 66
40306894411728
5038361801466
30230170808796
15115085404398
40306894411728
15115085404398
25191809007330
g^8 = 25385089642471716799749156 00

113866976713136000
113866976713136000
6833201860278816000000
1480270697270768
70768

1138669767131316000
1138669767131316000
18218716274101056000000
1480270697270768
480270697270768

1138669767131316000
1138669767131316000
18218716274101056000000
14802706972707108
14802706972707108
706880999212

1138669767131316000
1138669767131316000
18218716274101056000000
14802706972707108
14802706972707108
7970688369919212
6832018602787896
7970688369919212
10248027904181844
6832018602787896
6832018602787896
9109358137050528
14802706972707108
11386697671313 16
f^2g^8 = 12965688385788854072639878918560 00000

$h^4 g^4$ = 50383618014660
4238757909 19700
352685326102620 00
45345256213194
05038361801466
45345256213194
00000000000000
45345256213194
35268532610262
25191809007330
35268532610262 (*)
40306894411728
15115085404398
10076723602932
20153447205864
21356395935360052569482802000
20000000
427127918707401051389656040000000000000 = $2g^4h^4pq$

71
5038361801466
35268532610262
35772368790 4086

(*) *Questa operazione mostra una elegantissima pratica qui sul fatto scoperta per conoscere, se prima di sommar li prodotti d'ogni carattere del moltiplicante col moltiplicando siano fatti senza errore; della qual pratica vedi le sue regole descritte in questo libro pag.*

Prova. *Dopo queste cose non sarebbe conveniente il tralasciare di dar una prova a tante non meno che lunghe e faticose operazioni, osservando, se il risultato da esse corrisponda alle ricerche; e ciò maggiormente perchè le operazioni da farsi sono in minor numero, e senza paragone più facili. Le prime sono le quattro analogie adoperate nella risoluzione del Problema, per le quali si trovano in numeri li valori delle quattro parallele* NO OP PQ NQ, *che sono* 5107.1́, 3396.7́, 5442.0́, 4561.1́. *Le seconde sono la summa di tali valori con quei de' quattro lati* 61000, 43000, 57000, 65000, *che uniti fanno il numero* 40507 *in* R;

9
183
1862
18644
186483
1864868
18648761
186487625
1864876303
18648763063
186487630667
1864876306746
18648763067522
186487630675243
1864876306752465
18648763067524705
186487630675247109
1864876306752471185

8694409198716843558743318518560 00000
594
4540
81691
711598
15214971
29602768
1095400743
6296261855
70163294687
142170054 9843
1162871351743 1
4394556769 5585
6648041560541 18
1043412640 2838956
1109744869076 63100
17730671570039575 00
94678480926733519 00
1434665589 10995975

4238757909 19700
486.5 = $\frac{fg^4 - \sqrt{(f^2g^8 - 2g^4h^4pq)}}{h^4}$

2062316137550804 05
366812973872004 0
277123411362440 5
22797936810620 50
1604147264635 50

$\frac{m}{r} = 29890$
$x = 4865$
$\frac{m-}{r-} x = 25025$

$n = 23160$
4865
$n - x = 18295$

$t = 24350$
4865
$t - x = 19485$

2989 : 6500 :: 25025
5107.1
$\frac{am-ax}{m}$
6100
2502500
150150
152652500
3202
21350
4270
1281

2316 : 4300 :: 18295
2396.7
$\frac{bn-bx}{n}$
4300
5488500
73180
78668500
9188
22405
15610
17140
928

2989 : 6500 :: 25025
5442.0
$\frac{cr-cx}{r}$
6500
12512500
150150
162662500
13212
12565
6090
1120

2435 : 5700 :: 19485
4561.1
$\frac{dt-dx}{t}$
5700
13639500
97425
111064500
13664
14895
2850
4150
1715

6500
5107.1
4300
2396.7
6500
5442
5700
4561.2
40507.
20253.5
R

202535
4865
1012675
1215210
1620280
810140
S 985.332775
14.667225^{VI}
1000.000000

la di cui metà per ultima operazione $20253\frac{1}{2}$ *moltiplicata per il numero ritrovato* 4865, *deverdar il numero* 1000 *di prodotto; ma veggendosi in* S, *che recise le decimali, esibisce* 985.332775^{VI}, *esso è mancante di* 14 *unità e decimali* 667225^{VI}; *la qual mancanza non essendo spregevole, non può rifondersi in altro, che nel meccanismo praticato, quando non fosse corso qualche errore nelle anteriori operazioni così proline, che certamente non ho intenzione di riandare; bastandomi la fatica fatta sin qui, ben lungi dal dubitare, che sia legittima la risoluzione simbolica del Problema fatta in principio.*

Adì 5 Settembre 1781.

Nuova Scoperta d'una Pratica elegante, e molto opportuna per conoscere, se avanti di summar li prodotti fatti da ogni carattere del moltiplicante col moltiplicato siano senza errori.

Definizioni.

Della contrapposta Moltiplicazione

1. *Il numero* A *si dica* moltiplicato.
2. *Il numero* B *si dica* moltiplicante.
3. *Li numeri* C D E F *si dicano* prodotti parziali.

A...5378
B...4692
C...10756
D...48402
E...32268
F...21512

G...21
5378
10756
H...112938

Teorema. *Sommando obliquamente li caratteri dei prodotti parziali d'una moltiplicazione, cioè li primi caratteri fra di se; fra di se li secondi; poi li terzi &c: costituiranno la summa uguale al prodotto che si fa dal moltiplicare il numero* moltiplicato *per la summa delle unità di tutti li caratteri del numero* moltiplicante.

La summa delle unità di tutti li caratteri del moltiplicante B *faccia il numero* G; *e il numero* G *moltiplicando il numero* A *faccia il prodotto* H: *dico, che summando obliquamente cioè li primi caratteri dei prodotti parziali* C D E F *si avrà* 2+8+2+6 = 18, *di cui portando l'unità per la decina, si troverà in prima località di* H *il carattere* 8. *Summando li secondi caratteri degli stessi prodotti parziali con l'unità, che si porta, si avrà* 1+1+6+0+5 = 13, *cioè l'unità da portarsi per la decina, e il carattere* 3 *in seconda località di* H. *Inoltre che la summa dei terzi caratteri con l'unità anzidetta sarà* 1+5+2+4+7 = 19, *cioè l'unità della decina, e il* 9 *in terza località di* H. *Di nuovo che si troverà* 1+1+2+8+0 = 12, *cioè il* 2 *in quarta località di* H, *e l'unità della deina; e per ultimo che da* 1+2+3+4+1 = 11, *cioè dai quarti caratteri dei prodotti parziali* C D E F *si costituiranno in* H *gli ultimi due caratteri* 11 *in quinta e sesta località; cosicchè sommati obliquamente li caratteri dei prodotti parziali* C D E F *della moltiplicazione* AB, *cioè li primi fra di se; fra di se li secondi; poi li terzi &c: costituiscano la summa uguale al prodotto, che si è fatto dal moltiplicare il moltiplicato* A *per la summa delle unità di tutti li caratteri del moltiplicante* B.

Imperciocchè essendo C = 2A, D = 9A, E = 6A, F = 4A, *sarà* C+D+E+F = ~~H~~ ~~*e però la summa obliqua*~~ 21 A; *ma è* 21A = H: *dunque sarà eziandio* C+D+E+F = H; *e però la summa obliqua dei pro=*

C 10756 = 2A
D 48402 = 9A
E 32268 = 6A
F 21512 = 4A
112938 = 21A

dotti parziali d' una moltiplicazione sarà uguale al prodotto, che si fa dal moltiplicare il numero moltiplicato per la summa delle unità di tutti li caratteri del numero moltiplicante; il che bisognava dimostrare.

4. Definizione. Il prodotto H, che si fa dalla summa delle unità di tutti li caratteri del moltiplicante col moltiplicato, si dica prodotto di riscontro.

Corollario. Se dunque la summa obliqua dei prodotti parziali d' una moltiplicazione non si trova eguale al prodotto di riscontro: si avrà indizio manifesto, che nei prodotti parziali è corso qualche errore.

Scolio. L' uso di questa nuova scoperta apparirà sempre di utilità maggiore, quanto maggiori saranno i numeri, che si avrà bisogno di moltiplicare, essendo già nota abbastanza l' intensione di spirito, che convien praticare per tener applicata la mente, qualor si moltiplica un numero di molti caratteri per un altro numero di molti caratteri, onde ne debba derivare appunto una moltitudine di prodotti parziali; per assicurarsi de' quali non è sempre spediente replicar la fatica, ad uno ad uno riscontrandoli: primieramente perchè è troppo gravosa; in secondo luogo anche perchè d' ordinario si ricade negli errori di prima, se mai fatto se ne fosse alcuno, come ognun potrà averne fatta sperienza, per cui è ragionevole restar tuttavia dubbiosi, se tali prodotti siano senza errore.

E' utile inoltre perchè è facile e pronta riguardo a certe casualità, che accadono sul fatto, cioè nell' atto di servirsene; le quali sapendole conoscere, come agevolmente si conoscono, e cogliendole opportunamente, la rendono assai più breve. Prima di tutto è osservabile, che per quanto sia di molti caratteri una moltiplicazione, vi vuol molto per fare, che il moltiplicante ne abbia tanti, che sommando insieme le unità dei medesimi, giungano queste ad un centinajo; poichè nemmeno vi giunge un numero (che pur è assai grande), il quale fosse espresso da undici caratteri, che tutti fossero il 9; mentre tal summa non si esprime che con li due caratteri 99; e però si può dire, che saranno sempre due li caratteri di questa pratica, cioè quelli che produranno il numero di riscontro.

Secondariamente questi due caratteri qualche volta si costituiscono con un zero in prima località, come sono 10, 20, 30 &, per cui non fa mestieri, com' è noto, che della sola moltiplicazione del carattere in seconda località. Ovvero ambedue esprimono bassi caratteri, come 12, 21, 13, 31, 23, 32 &; oppure ancora caratteri uguali, come 11, 22, 33, pe' quali le moltiplicazioni sono dell' ultima facilità.

In terzo luogo ambedue, o uno almeno di tali caratteri si trova speso fra quelli, che formano il moltiplicante; nel qual caso tra li prodotti parziali si trova la moltiplicazione già fatta, cosicchè basta solo il trascriverla nella sua località per il nuovo prodotto di riscontro.

Quarto li due caratteri della summa di cui si parla escono alle volte in modo, che sono li medesimi e con lo stesso accoppiamento di due altri uguali fra li caratteri costituenti il moltiplicante; cosicchè di più non occorra che far la summa dei loro prodotti parziali, come giacciono un sotto l' altro per aver il prodotto di riscontro; e questo caso riduce la pratica alla massima brevità.

Perchè poi li zeri nel moltiplicante possono essere occasione di fare falsamente le summe oblique dei prodotti parziali: si leverà ogni difficoltà, o rischio con lo scrivere intieramente a suo luogo tante linee di zeri fra i prodotti parziali, quanti sono i zeri nel moltiplicante; e sarà bene anche supplire con un zero in fine d' ogni linea, che avesse un carattere di meno delle altre. Ma questi avvertimenti si renderanno più chiari con gli esempj che metto in seguito un dopo l' altro; aggiungendo solamente di segnare con un punto tutte le summe oblique non meno che ogni carattere del prodotto di riscontro di mano in mano chè si opera; affinchè l' occhio non si confonda in far una summa per un' altra, e in prendere un carattere per l' altro.

Seguono gli Esempj per
ognun de' casi summominati.

Primo Caso.

Esempio unico.

```
  4876521349976
  3949544925239
  -------------
   43888692149784
   14629564049928
    9753042699952
  24382606749880
   9753042699952
  43888692149784
  19506085399904
  19506085399904
  24382606749880
  43888692149784
  19506085399904
  43888692149784
  14629564049928
  . . . . . . . . . . . . . .
```

```
                  68
  ------------------
    3901217079 9808
    2925912809 9856
  ------------------
    3316034517 98368
  . . . . . . . . . . . .
```

In questo primo caso apparisce, che formandosi da tredici caratteri il moltiplicante: tuttavia non giungendo che a 68 la summa delle unità de' medesimi, vi vuol molto per giungere a 100, cioè a far un numero da scriversi con tre caratteri.

Secondo Caso.

Esempj tre.

Esempio. I.

```
              20          3241586
  ---------------          345143
  64831720              ---------
  . . . . . . . .         9724758
                         12966344
                         3241586
                        16207930
                        12966344
                        9724758
                        . . . . . . .
```

Nel primo esempio di questo secondo caso la summa delle unità dei caratteri del moltiplicante ha un zero in prima località. Nel secondo esempio la summa si esprime con due caratteri bassi; e nel terzo con due caratteri uguali.

Esempio. II.

```
    78640693
      426775
  ----------
   393203465
   550484851
  550484851
  471844158
  157281386
  314562772
  . . . . . . . . .
```

```
                 31
  -----------------
        78640693
      235922079
  -----------------
      2437861483
  . . . . . . . . . .
```

Esempio. III.

```
     8765432
      127869
  ----------
    78888888
   52592592
  70123456
  61358024
  17530864
  8765432
  . . . . . . . .
```

```
              33
  --------------
      26296296
     26296296
  --------------
     289259256
  . . . . . . . . .
```

Il terzo caso con un solo esempio fa vedere, come tra li prodotti parziali si trovino quelli, che dovrebbno farsi dai caratteri, ch' esprimono la summa delle unità di quelli, i quali formano il moltiplicante, e che sono li prodotti K L; onde non sia bisogno, che trascriverli in M N, e poi farne la summa.

```
        67890123
         4632587
      ----------
       475230861
      543120984
  K--339450615
    135780246
  L--203670369
   407340738
   271560492
   . . . . . . . . .
```

```
                35
  M--339450615
  N--203670369
  ---------------
  H-2376154305
```

Terzo Caso

Esempio unico.

Nel quarto caso si osserva, che la summa delle unità, che hanno li caratteri del moltiplicante, sono li medesimi, e con lo stesso accoppiamento di due altri caratteri nel moltiplicante, per cui si trovano uno sotto l'altro li due prodotti parziali, la di cui summa in un tratto offre il prodotto di riscontro. Le unità dei caratteri del moltiplicante summano 39; e nel moltiplicante medesimo si trovano accoppiati li due caratteri 39 in terza e quarta località, i quali hanno fatto un sotto l'altro li due prodotti parziali P Q, che sommati insieme fanno il prodotto R, cioè quello di cui si ha bisogno per fare il riscontro.

```
               39
  ---------------
  R.2319865314
  . . . . . . . . . .
```

Quarto Caso.

Esemp. unic.

```
       59483726
         4923957
      ----------
      416386082
     297418630
  P---535353534
  Q---178451178
    118967452
    535353534
   237934904
   . . . . . . . . .
```

Quinto e ultimo Caso.

Esempio unico.

Rimane da vedersi il quinto ed ultimo caso, cioè come nella istituzion de' zeri, quandochè tra li caratteri del moltiplicante ve ne fosse alcuno, ed anche quando alcune linee de' medesimi avessero un carattere di meno di alcune altre: agevole si renda all' occhio il conoscere senza confondersi li caratteri da sommarsi. Ma potendosi ciò comprendere con la sola osservazione dell' esempio, non si procede più avanti con veruna dichiara=

```
              29
  --------------
      29591649
      6575922
  --------------
     95350869
  . . . . . . . . .
```

```
        3287961
        3090827
      ---------
       23015727
     06575922
     26303688
    00000000
    29591649
  00000000
  09863883
  . . . . . . . .
```

zione. Se pertanto abbia taluno bisogno di apprestarsi ad una moltiplicazione di questa fatta, la quale cioè abbia li suoi fattori espressi da molti caratteri; e voglia assicurarsi della esattezza dei prodotti parziali di quella: sarà bene, che preventivamente all' operare abbia intenzione di far uso di questa pratica; mentre con tale disposizione nulla ommetterà di quelle cose, che si sono avvertite; e particolarmente non mancherà all' ultimo ricordo, che è quello di fare la sostituzione dè zeri, e che può quivi dirsi veramente necessario. Quando poi abbia ciò effettuato, operi, come ordina il seguente

Canone. *Se avanti di summar li prodotti fatti d'una moltiplicazione si uniscano insieme tutte le unità dei caratteri che formano il numero moltiplicante; e per la summa delle medesime si moltiplichi il numero moltiplicato, e se ne faccia il suo prodotto: tutti li prodotti fatti della moltiplicazione saranno sicuramente senza errore quella volta, che summando dei detti prodotti li primi caratteri fra di se; fra di se li secondi; poi li terzi &c. facciano tutta la summa in complesso uguale al prodotto, che si è detto di sopra.*

Problema. *Data la ragione dè numeri 19 : 17; e dato il numero 9876: trovar un altro numero, a cui il 9876 abbia il triplo e due terzi della ragione dè num.i 19 : 17.*

Si prendano i logaritmi 12787536 del numero 19, e 12304489 del numero 17; e la loro differenza 483047 sarà la quantità della ragione di 19 : 17. E perchè è $3\frac{2}{3} = \frac{11}{3}$, si moltiplichi per 11 la differenza 483047; e diviso per 3 il prodotto 5313517: nel quoziente $1771172\frac{1}{3}$ si avrà la quantità del triplo e due terzi della ragione dè numeri 19 : 17, cioè la differenza del logaritmo del numero, che si cerca, dal logaritmo del numero dato. Dunque del numero 9876 preso il logaritmo 39945811, se gli sottragga il $1771172\frac{1}{3}$; e la differenza $38174638\frac{2}{3}$ sarà il logaritmo del numero, che si cerca, e che riscontrato nelle tavole si trova esser tra mezzo ai due logaritmi 38174993, 38174331, al primo dè quali corrisponde il numero 6569, e 6568 al secondo. Per aver dunque il medio corrispondente sino alle terze decimali, di questi due logaritmi si prenda la differenza 662; ed anche la differenza tra il logaritmo medio $38174638\frac{2}{3}$, e il logaritmo minore 38174331, la quale sarà $307\frac{2}{3}$; e fatta l' analogia 662 : 1000 :: $307\frac{2}{3}$: 464, si avrà nell' ultimo termine, quanto si debba levare dal numero 6569; cosicchè fatta la sottrazione, il numero proposto da ritrovare sia 6568.464''', a cui il numero dato 9876 abbia il triplo, e due terzi della ragione dè numeri 19 : 17.

Imperciocchè la ragione di $19^3 : 17^3 = 6859 : 4913$ è triplicata della ragione di 19 : 17. La ragione di $\sqrt[3]{19} : \sqrt[3]{17}$ è suttriplicata, cioè una terza parte della ragione di 19 : 17; e due terze parti della medesima sarà la ragione di $\sqrt[3]{19^2} : \sqrt[3]{17^2} = \sqrt[3]{361} : \sqrt[3]{289}$. Dunque summando insieme le ragioni di 6859 : 4913, $\sqrt[3]{361} : \sqrt[3]{289}$ si avrà il triplo e due terzi della ragione di 19 : 17. Si summino, e la ragione composta sarà di $6859\sqrt[3]{361} : 4913\sqrt[3]{289} = \sqrt[3]{6859^3 \cdot 361} : \sqrt[3]{4913^3 \cdot 289} = \sqrt[3]{322687697779 \cdot 361} : \sqrt[3]{118587876497 \cdot 289} = \sqrt[3]{116490258898219} : \sqrt[3]{34271896307633} =$ 48838 : 32482 prossimamente. Si faccia pertanto l' analogia 48838 : 32482 :: 9876 : 6568.496'''; e il quarto termine sarà ugualmente che prima il numero proposto da ritrovarsi. Ma esso è il medesimo ritrovato di sopra, non essendo computabile il divario di 032''' decimali terze; avvegnacchè l' uno e l' altro nelle ultime minuzie sieno determinati imperfettamente, cioè il primo per via delle differenze dei logaritmi, e il secondo con radici cubiche irrazionali. Dunque il numero 6568.464''' è quello, che bisognava ritrovare.

Scolio. 1. Quanto sia facile, e men fatiroso il modo primo, facendo uso dè logaritmi, a fronte del secondo, in cui s' impiegano radicali e potenze: non fa mestieri il dichiararlo per essere manifesto da se medesimo; e particolarmente quando i multipli, e i summultipli delle ragioni esigessero esponenti assai maggiori tanto nelle potenze, che nelle radici. La differenza poi ~~di uno~~ di uno dall' altro, che in questa risoluzione è di 32 decimali terze, equivale ~~[illegible]~~ più sensibilmente a $\frac{1}{31}$ di unità ~~poco più~~ meno.

Scolio. 2. Di nuovo adoperando in altro modo i logaritmi: l' ultima espression della ragione fatta in numeri al-

ti sotto radicali di terzo grado, ridotta sotto potenze un= perfette diventa $19^{\frac{11}{3}} : 17^{\frac{11}{3}}$; e però li rispettivi logaritmi saranno $\frac{11}{3} \cdot 12787536$, $\frac{11}{3} \cdot 12304489$, che ridotti all'operazione A B si cangiano nei seguenti 46887632, $45116459\frac{2}{3}$; coi quali facendo l'analogia aritmetica C, assegnandole per terzo termine il logar. 39945811 del numero dato 9876, si troverà il quarto logar. D $38174638\frac{2}{3}$ del numero che si cerca, nè più nè meno, come si è trovato da principio.

C: $46887632 \cdot 45116459\frac{2}{3} \therefore 39945811$

$$\begin{array}{r} 39945811 \\ 45116459\frac{2}{3} \\ \hline 85062270\frac{2}{3} \\ 46887632 \\ \hline \text{D} \quad 38174638\frac{2}{3} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 12787536 \\ 11 \\ \hline 140662896 \\ \text{A} \ldots 46887632 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 12304489 \\ 11 \\ \hline 135349379 \\ \text{B} \ldots 45116459\frac{2}{3} \end{array}$$

Avvertimento notabile. *Questa pratica dello Scolio 2. è la più breve, e facile d'ogn'altra per la risoluzione di consimili Problemi.*

A dì 8 Novembre 1781.

Teorema. *Ogni quadrato fatto da una radice di un dato numero di termini algebraici, comprende tanti termini, quante ha unità il numero triangolare, il di cui lato è il numero de' termini della radice medesima.*

$$\begin{array}{ll} & a+c+m+n+x \\ & a+c+m+n+x \\ \hline \text{C} & aa+ac+am+an+ax+cc+cm+cn+cx+mm+mn+mx+nn+nx+xx \\ \text{B} \ldots & +ac+am+an+ax \quad +cm+cn+cx \quad +mn+mx \quad +nx \\ \hline \text{A} \ldots & aa+2ac+2am+2an+2ax+cc+2cm+2cn+2cx+mm+2mn+2mx+nn+2nx+xx \end{array}$$

La radice sia di cinque termini algebraici $a+c+m+n+x$, e faccia il quadrato A. Il numero 5 moltiplichi se medesimo accresciuto dell'unità, cioè il numero 6, e faccia il prodotto 30: è manifesto, che la metà del 30, cioè il 15 è numero triangolare, il di cui lato è il numero 5, cioè il numero de' termini della data radice. Dico, che i termini, i quali costituiscono il quadrato di essa, sono quindici.

Imperciocchè il termine a moltiplicando i termini $a+c+m+n+x$ fa manifestamente cinque termini di moltiplicazione $aa+ac+am+an+ax$. Il termine c moltiplicando li cinque termini medesimi, fa quattro termini di moltiplicazione; avvegnachè c moltiplicando a si reciproca con a, che ha moltiplicato c; e facendo due prodotti eguali, cioè $ac = ac$, due termini divengono un termine solo $2ac$. Il termine m moltiplicando li cinque termini $a+c+m+n+x$, fa per la stessa ragione tre termini di moltiplicazione: poichè m moltiplicando a, e moltiplicando c, si reciproca con a e c, che hanno moltiplicato m ed hanno fatto prodotti eguali, l'uno all'altro, cioè $am = am$, e $cm = cm$; per cui quattro termini equivalgono a due, cioè a $2am+2cm$. Si dimostrerà similmente che il termine n fa solamente due termini di moltiplicazione; e che un termine solo si fa dal termine x. Li termini dunque del quadrato A saranno $5+4+3+2+1$, la summa de' quali costituisce il numero 15 numero triangolare, il di cui lato è il 5 numero de' termini della radice. Allo stesso modo si dimostrerà d'ogn'altro quadrato, la di cui radice abbia qualsivoglia numero di termini algebraici. Dunque ogni quadrato, fatto da una radice di un dato numero di termini algebraici comprende tanti termini, quante ha unità il numero triangolare, il di cui lato è il numero de' termini della radice medesima.

Corollario. *Dalla moltiplicazione fatta si osserva nella linea* B, *che i termini reciproci fatti dal termine* a *negli altri termini* $c+m+n+x$ *sono 4 di numero; li reciproci fatti dal* c *nei rimanenti* $m+n+x$ *sono 3 di numero; son 2 li reciproci fatti dall'* m *negli altri* $n+x$. *ed un solo il reciproco fatto dall'* n *nell'* x; *e inoltre che* $4+3+2+1 = 10$ *è pure numero triangolare, il di cui lato è il numero de' termini 5 posto da principio, e diminuito dell'unità, cioè il numero 4. Di più essendosi conosciuto, che nella linea* C *eziandio li termini non reciproci fanno il numero triangolare 15; siccome apparisce chiaramente, che tutti insieme questi termini reciproci, e non reciproci costituiscono necessariamente il numero quadrato 25, la di cui radice è il numero de' termini 5, avvegnachè ciascun de' termini si moltiplica con ciascuno: così rendesi manifesto il Teorema seguente, che l'occhio stesso vede con ugual evidenza, benchè dimostrato materialmente con le apposte figure.*

Teorema. *Ogni quadrato in numeri si risolve in due numeri triangolari, i lati de' quali differiscono fra di se dell' unità; e il lato del maggiore di essi è la radice del quadrato medesimo.*

Problema I. *Trovare la proporzione, che hanno fra di se due ragioni proposte in numeri.*

Siano proposte le due ragioni de' numeri 47 : 13, e 19 : 17, bisogna trovare la proporzione, che ha la prima ragione 47 : 13 paragonata alla seconda 19 : 17.

Dal logar. 1672079 del 47 si sottragga il logar. 1113943 del 13; e la differenza 558154 sarà la quantità della prima ragione 47 : 13. Dal logar. 1278753 del 19 si sottragga il logar. 1230449 del 17; e la differenza 48304 sarà la quantità della seconda ragione proposta 19 : 17. Dico, che la ragion de' numeri 47 : 13 paragonata alla ragion de' numeri 19 : 17 ha la proporzion della differenza 558154 alla differenza 48304; cioè che dividendo quella per questa, e trovando il quoziente A: la ragione di 47 : 13 comprende undici volte, e poco più della metà la ragione di 19 : 17.

48304) 558154 (A $11\frac{268}{483}$
75107
26802

Imperciocchè si trovino dodici termini, caduno sino alle decimali terze, i quali sieno in continua ragione di 19 : 17, e il primo sia il 47. (47.000) : (42.053) : (37.626) : (33.665) : (30.122) : (26.951) : (24.114) : (21.576) : (19.305) : (17.273) : (15.455) : (13.828). È manifesto subito, che essendo l'ultimo termine, tuttavia dopo tanti, maggior del 13 termine conseguente della prima ragione: essa contiene in se undici volte la seconda ragione di 19 : 17, come indicano le 11 unità del quoziente. Ma è vero ugualmente, che la ragion di 47 : 13 non contiene in se per la duodecima volta la ragione di 19 : 17; poichè fatta l'analogia 19 : 17 :: (13.828) : (12.372), si trova il quarto termine minor del 13; onde apparisce minore la ragione di (13.828) : (13.000), cioè una parte della ragione di 19 : 17, e come viene indicata dalla frazione $\frac{268}{483}$ del quoziente. Che poi questa ragione sia maggior della metà di 19 : 17 si può conoscere facendo altra analogia $\sqrt{19}$: $\sqrt{17}$ :: (13.828) : (13.079), nella quale il termine ultimo dimostra di detta ragione la metà, per cui manifestamente (13.828) : (13.000) ha più ragione che (13.828) : (13.079). Dunque proposte le due ragioni in numeri 47 : 13, e 19 : 17, si è trovato, che la prima paragonata alla seconda ha la proporzione de' numeri 558154 : 48304; ovvero che diviso quello per questo, la prima comprende undici volte e poco più della metà della seconda come doveasi fare.

Scolio. *Per trovar con qualche maggior esattezza li termini continuamente proporzionali ordinati di sopra, e non aumentare di molto la fatica col far che tutti essi termini non dipendano l'un dall' altro: nelle molte regole del tre mi sono prevalso delle potenze de' numeri 19, 17, non però oltre la quarta; e quindi, dopochè ho dovuto farle, ho voluto anche trascrivere qui le operazioni.*

19^2 = 361 17^2 = 289
19^3 = 6859 17^3 = 4913
19^4 = 130321 17^4 = 83521

19 : 17 :: 47 — 42.052 — 2
17
329
47
799
39
300
50
12

361 : 289 : 47 — 37.626 — 3
289
2023
1156
13583
2753
2260
940
2180
14

6859 : 4913 :: 47 — 33.665 — 4
47
34391
19652
230911
25141
45640
44860
37060
2765

130321 : 83521 — 30.122 — 5
47
584647
334084
3925487
158570
282490
218480
88159

19 : 17 :: 30122 — 26.951 — 6
17
512074
132
180
097
24
5

361 : 289 :: 30122 — 24.114 — 7
289
271098
240976
60244
8705258
1485
412
515
1548
104

6859 : 4913 :: 30122 — 21.575 — 8
4913
391586
271098
120488
147989386
10809
39503
52088
40756
6476

130321 : 83521 :: 30122 — 19.304 — 9
30122
167042
1002252
250563
2515819562
1212609
397205
0624262
102978

19 : 17 :: 19305 — 17.272 — 10
17
328185
138
51
138
55
17

361 : 289 :: 19305 — 15.454 — 11
289
173745
154440
38610
5579145
1969
1641
1974
1695
251

19305
4913
250965
173745
77220
94845465 — 6859 — 13.827 — 12
26255
56784
19126
54085
8072

13828
17
235076 — 19 — 12.372
45
70
137
46
8

Problema II. *Accrescere d'una parte proposta una data ragione di numeri.*

Li due numeri 7203 : 1344 abbiano fra di se la ragione data, la quale debbasi accrescere della terza parte; cioè debbasi trovar un numero, a cui paragonato l'antecedente 7203 abbia $\frac{4}{3}$ della ragione di 7203 : 1344; ovvero a cui paragonato il conseguente 1344, abbia $\frac{1}{3}$ della ragion medesima; avvegnachè sia per se manifesto, che in ambedue le maniere dovrà uscirne lo stesso numero.

	Logar. 38575134	di 7203.
	Logar. 31283993	di 1344.
A	Differ. 7291141	log. della rag.^e
B	2430380 $\frac{1}{3}$	
C	9721521 $\frac{1}{3}$	
D	28853612	

Dal logar. dell'antecedente sottratto il logar. del conseguente, si avrà il valor A della ragione data. Diviso A per 3, faccia B; e sarà B $\frac{1}{3}$ della ragione di 7203 : 1344. Unito A con B faccia la summa C, la quale sarà $\frac{4}{3}$ della ragion medesima. Se pertanto si sottragga C dal logaritmo dell'antecedente, ovvero B dal logaritmo del conseguente, si avrà la stessa differenza D, la quale riscontrata nelle Tavole esibisce il numero 768 : dico, che il numero 768 è quello, che si ricerca; a cui l'antecedente 7203 ha $\frac{4}{3}$ della ragione data 7203 : 1344; ovvero a cui il conseguente 1344 ha $\frac{1}{3}$ della stessa ragione.

Imperciocchè se la ragion de' numeri 1344 : 768 sia una terza parte della rag.^e di 7203:1344 tra questi cadranno due numeri proporzionali di mezzo nella ragione di 1344 : 768 = 7 : 4. Ma facendo le tre analogie continuate P Q R, si trova, che il quarto termine dell'ultima è il preciso conseguente termine della ragione data, cioè il numero 1344 : dunque la ragione di 1344 : 768 è la terza parte della ragione di 7203 : 1344; e però si è accresciuta della parte proposta una ragione data, com'era d'uopo di fare.

P	7 : 4 :: 7203 : 4116
Q	7 : 4 :: 4116 : 2352
R	7 : 4 :: 2352 : 1344

Corollario. *Da ciò appare, come data in numeri qualunque ragione, può essa dividersi in quante ragioni uguali si vogliono.*

Sia proposto di dividere in 6 ragioni uguali la data ragione dell'antecedente Problema, la di cui quantità, come si è detto, è il logar. A 7291141 del suo esponente. Questo diviso per 6 dà per ~~esponente~~ logaritmo dell'esponente della ragion, che si cerca, la metà di B, cioè il logaritmo 1215190 (trascurando la frazione $\frac{1}{6}$, che si dovrebbe aggiungere); e questo sottratto dal logar. 38575134 del termine antecedente 7203 faccia la differenza 37359944; a cui nelle Tavole corrispondendo più prossimamente il numero 5445 : Dico, che la ragion de' num. 7203 : 5445 è la sesta parte della ragion proposta 7203 : 1344.

T

```
        14406
        14406
        86436
       57624
      57624
     14406
    207532836
            7
   1452729852
3     552
68      872
761    11198
7621  357752
76224  52856
```

Imperciocchè essendosi veduto, che la ragione di 7 : 4 è la terza parte della ragione data 7203 : 1344; e la ragione di $\sqrt{7} : 2$ è la metà della ragione di 7 : 4, la ragione di $\sqrt{7} : 2$ sarà la sesta parte della ragione di 7203 : 1344; ma facendo l'analogia $\sqrt{7} : 2 :: 7203 : \frac{14406}{\sqrt{7}}$, cioè $\sqrt{\frac{14406^2}{7}} = \sqrt{\frac{7 \cdot 14406^2}{7 \cdot 7}} = \sqrt{\frac{1452729852}{49}} = \frac{38115}{7}$ come si vede in T, = 5445, si trova nel quarto termine lo stesso numero trovato nelle Tavole: dunque la ragione di 7203 : 5445 è la sesta parte della ragione data 7203 : 1344, come si avea detto di poter fare.

Teorematiche Osservazioni, con le quali vie più si conferma, che li logaritmi degli esponenti sono l'unico mezzo per conoscere la quantità delle ragioni, e la mutua relazione, ch'esse hanno fra di se.

6561 : 4374 : 1944 : 384

Li quattro numeri soprascritti si corrispondono fra di se in tal modo l'un dopo l'altro, chè il primo al secondo ha la ragione di 3 : 2; il secondo al terzo ha la ragion medesima duplicata, cioè quella di 9 : 4; e quadruplicata è quella del terzo al quarto, cioè di 81 : 16. Dunque li logaritmi degli esponenti di queste ragioni procederanno in serie uno doppio dell'altro. Di fatto li logaritmi di questi numeri sono A B C D; e le differenze fra li medesimi E F G sono realm.^te una doppia dell'altra.

A	38169700		
B	36408788	1760912	E
C	32886963	3521825	F
D	25843312	7043651	G
		12326388	H

2. Di nuovo perchè la prima ragione di 6561 : 4374 è una volta la ragione di 3 : 2 ; la seconda di 4374 : 1944 è due volte la ragione di 3 : 2 ; e perchè la terza di 1944 : 384 è quattro volte la ragione medesima : è manifesto, che il primo termine all'ultimo, cioè che la ragione di 6561 : 384 è sette volte la ragione di 3 : 2. Dunque il logaritmo dell'esponente di quella, cioè la summa H degli esponenti E F G sarà settuplo del logaritmo dell'esponente di 3 : 2 ; il che si verifica in L, dove si è moltiplicato per 7 il logaritmo K dell'esponente di essa ragione 3 : 2, variando il prodotto di 4 unità solamente.

logar. 04771212	del numero 3.
logar. 03010300	del numero 2.
K	1760912
	7
L	12326384

3. Inoltre essendo la ragione del primo termine all'ultimo settupla della ragione di 3 : 2, sarà la medesima che la ragione di $3^7 : 2^7$; e perciò ribassando li due numeri 6561 : 384, dovranno comparire necessariamente le due potenze settime de' numeri 3 : 2 ; la qual cosa avviene realm.te ; poichè li due numeri 6561 : 384 avendo per massimo divisor comune il 3 : fatta la divisione, si trovano li due numeri 2187 : 128 ; il primo de' quali è settima potenza del numero 3, il secondo del numero 2, come ognuno può farne pruova.

4. Se alcuno volesse dividere in due ragioni uguali quella, che ha tra il secondo termine al quarto, cioè la ragione di 4374 : 384 ; conoscendo apertamente, che tra questi due termini si racchiude precisamente sei volte la ragione di 3 : 2, conosce ugualmente, che tale ragion dimezzata sarà tre volte la ragione di 3 : 2, cioè quella di $3^3 : 2^3$; e ciò si riscontra in due maniere. La prima prendendo un numero proporzionale di mezzo tra li due 4374 : 384, che si ritrova essere 1296, per cui ciascuna delle ragioni 4374 : 1296, 1296 : 384 è come il cubo del 3

4374	1	1679616	F 3521825	27 log. 14313638
384	22	·65	G 7043651	8 log. 09030900
17496	249	2396	10565476	5282738
34992	2586	15516	5282738	
13122		000		
1679616				

al cubo del 2, cioè come 27 : 8 ; giacchè per questi due cubi dividendo i termini della prima ragione, il maggior per il maggior, e il minor per il minore, si trova il solo quoziente 162 ; e dividendo quei della seconda, si ha pure un solo quoziente 48 ; e di più ancora comparisce 162 : 48 = 27 : 8. L'altra maniera consiste in osservare che fatta la summa dei logaritmi F G degli esponenti delle dette ragioni, la metà di essa uguaglia la differenza dei logaritmi dei cubi 27 : 8, non dovendosi far conto, com'ognun sa, delle 3 unità, che la rendono alterata.

5. Finalmente nella ragione di 4374 : 1296 racchiudendosi tre volte la ragione di 3 : 2 e racchiudendosi una volta nella ragione 6561 : 4374, per ugualità nella ragione di 6561 : 1296 si racchiuderà quattro volte la ragione di 3 : 2 ; ma si racchiude ancora quattro volte nella ragione di 1944 : 384 : dunque sarà 6561 : 1296 = 1944 : 384.

6. Se questi numeri si scrivano, come sono continuati un dopo l'altro 6561 : 1296 : 1944 : 384, secondo la teoria delle proporzioni la ragione del primo all'ultimo si comporrà dalle ragioni del primo al secondo, del secondo al terzo, e del terzo al quarto ; ma cadauna delle ragioni del primo al secondo, e del terzo al quarto è quadrupla della ragione di 3 : 2 : dunque la ragione del primo all'ultimo si compone da otto ragioni di 3 : 2, e dalla ragione di 1296 : 1944. Ma la ragione del primo al quarto è la ragione di 6561 : 384, che si è dimostrato comporsi da sette ragioni di 3:2 (2) : dunque le otto ragioni di 3 : 2 insieme con la ragione di 1296 : 1944 sono uguali a sette ragioni di 3 : 2 ; per la qual cosa sarà necessariamente uguale a zero il loro eccesso, cioè una ragione di 3 : 2, e la ragione di 1296 : 1944. Ma queste due ragioni non possono essere uguali a zero se non siano una positiva, l'altra negativa e insieme uguali ; e la ragion negativa di 3 : 2 è la ragione inversa, cioè 2 : 3 : dunque la ragione di 1296 : 1944 sarà uguale alla ragione di 2 : 3 ; e per verità ribassando i termini di quella mediante il loro massimo divisor comune 648, comparisce la ragione di 2 : 3 ; e però

Corollario I. *Evidentemente si conferma, che se una data ragione si voglia positiva, diventa sempre negativa invertendo.*

E siccome componendo qualunque data ragione con se medesima fatta inversa, nasce proporzion d'uguaglianza : così

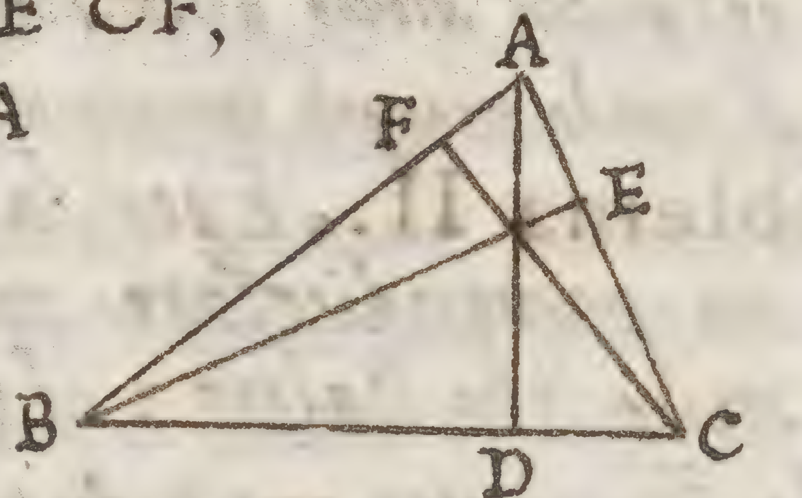
Corollario 2. *Con la stessa evidenza si conferma, che ogni ragion d'ugualianza è sempre zero di ragione.*

Scolio. Questa mia idea intorno alle ragioni è stata publicamente accennata per incidenza in una mia Dissertazione recitata nell' Accademia degli Aletofili di Castel Vecchio il dì 14 Decembre 1769 sopra l'invenzione della mia nuova Stadera.

In conseguenza del Problema scoperto, e descritto in questo Libro alla pagina 32.

Proposizione. *Ogni triangolo rettilineo, di qualunque spezie si voglia, si costituisce da tre triangoli rettangoli.*

È cosa degna di osservazione, che ogni triangolo rettilineo sia costituito da triangoli rettangoli tre di numero, nè più, nè meno; poichè sebbene si dovesse dire, che ogni triangolo isoscele non ne ha che due, e molto più che un solo ne ha il triangolo equilatero: giustamente però ragionando, li triangoli costituenti sono tre realmente, perchè l' uguaglianza loro non fa che sia minore la loro moltitudine. Questi già compariscono dal tirar in un triangolo da ciascun degli angoli le perpendicolari ai lati opposti, come nel triangolo ABC, in cui tirate le perpendicolari AD BE CF, li triangoli rettangoli sono sei di numero, cioè ADB ADC, BEC BEA, CFA CFB. Ma siccome per l'oggetto presente il triangolo ADB è simile al triangolo CFB, perchè essendo ambedue rettangoli, hanno eziandio comune l'angolo al punto B: come triangoli costituenti non sono considerati che un solo; e lo stesso per la ragion medesima dee dirsi delli due triangoli rettangoli ADC BEC, e degli altri due BEA CFA. Pare con più ragione, che ciascun triangolo ottusangolo fosse quello, che avesse due triangoli costituenti solamente, perchè tirata dall' angolo ottuso al lato opposto la perpendicolare, nell' area di esso non si può ravvisare il terzo triangolo con l' angolo retto; ma questo però si manifesta, quando da uno degli angoli acuti si tiri la perpendicolare al suo lato opposto prolungato; non dovendo far difficoltà alcuna l' osservar, che il triangolo è tutto fuori dell' area: Che sarà dunque, se mai talun dicesse, che neppure gli stessi triangoli rettangoli, che sono li costituenti degli altri obliquangoli, possono esentarsi dall' averne tre? E pure il fatto in rigore è così. Due sono già simili a lui per la 8. del 6. ma qual sia il terzo, forse molti non saprebbono rinvenirlo, quando non si faccia uso del nuovo Teorema descritto alla pagina 33.; imperciocchè dato a cagion d' esempio il triangolo rettangolo $\frac{4:3}{5}$, il teorema insegna, che il doppio dell' area d' un triangolo è un cateto in ognuno de' triangoli costituenti; la metà della differenza d' un quadrato d' un lato sottratto dalla somma de' quadrati degli altri due lati, sarà sempre un cateto positivo quella volta che il triangolo sia acutangolo; ma nell' ottusangolo sarà due volte positivo, e negativo una volta sola. Finalmente il prodotto di que' due lati, i quadrati de' quali si sono sommati insieme, sarà sempre ipotenusa: dunque nel triangolo proposto il doppio dell' area 12 è il cateto comune ai triangoli costituenti. Sottrando il 9 quadrato del 3 dalla somma de' quadrati $16+25=41$ degli altri due lati 4, 5: la metà 16 della differenza 32 è un altro cateto; e il prodotto delli due lati $4\cdot5=20$ è l' ipotenusa; cosicchè un de' triangoli costituenti sia $\frac{12:16}{20}$, i lati del quale avendo il 4 per massimo divisore, si riducono al triangolo proposto $\frac{3:4}{5}$. Di nuovo sottrando il 16 quadrato del 4 dalla somma de' quadrati $9+25=34$ degli altri due lati 3, 5: la metà 9 della differenza 18 è un altro cateto. Il prodotto poi delli due lati è $3\cdot5=15$, onde si abbia un altro costituente $\frac{12:9}{15}$; e divisi comunemente i suoi lati per 3, divenga il proposto triangolo come prima. Resta ora da vedersi il terzo costituente, operando con somiglianza, cioè sottrando il 25 quadrato dell' ipotenusa 5 dalla summa de' quadrati $9+16=25$ degli altri due lati 3, 4; ma incontrandosi uguaglianza, il cateto è un zero, e però il triangolo è nullo. Così direbbe chiunque non avesse cognizione della Genesi de' triangoli rettangoli numerici. Si proceda a ritrovar l' ipotenusa, facendo il prodotto delli due lati $3\cdot4=12$, e comparirà il triangolo $\frac{12:0}{12}$, li di cui lati divisi per 12 lo tramutano nel seguente $\frac{1:0}{1}$; ma questo è il triangolo rettangolo d' origine: dunque eziandio de' triangoli rettangoli sono tre di numero li costituenti.



Problema I. *Trovar li costituenti di due dati triangoli obliquangoli, il primo de' quali 17, 25, 28 è acutangolo; e l' altro 17, 28, 39 è ottusangolo.*

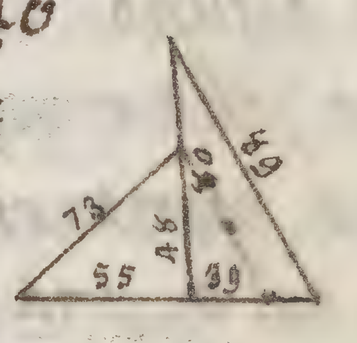
L'area del primo essendo 210, esibisce conseguentemente nel suo doppio 420 il cateto comune alli tre costituenti

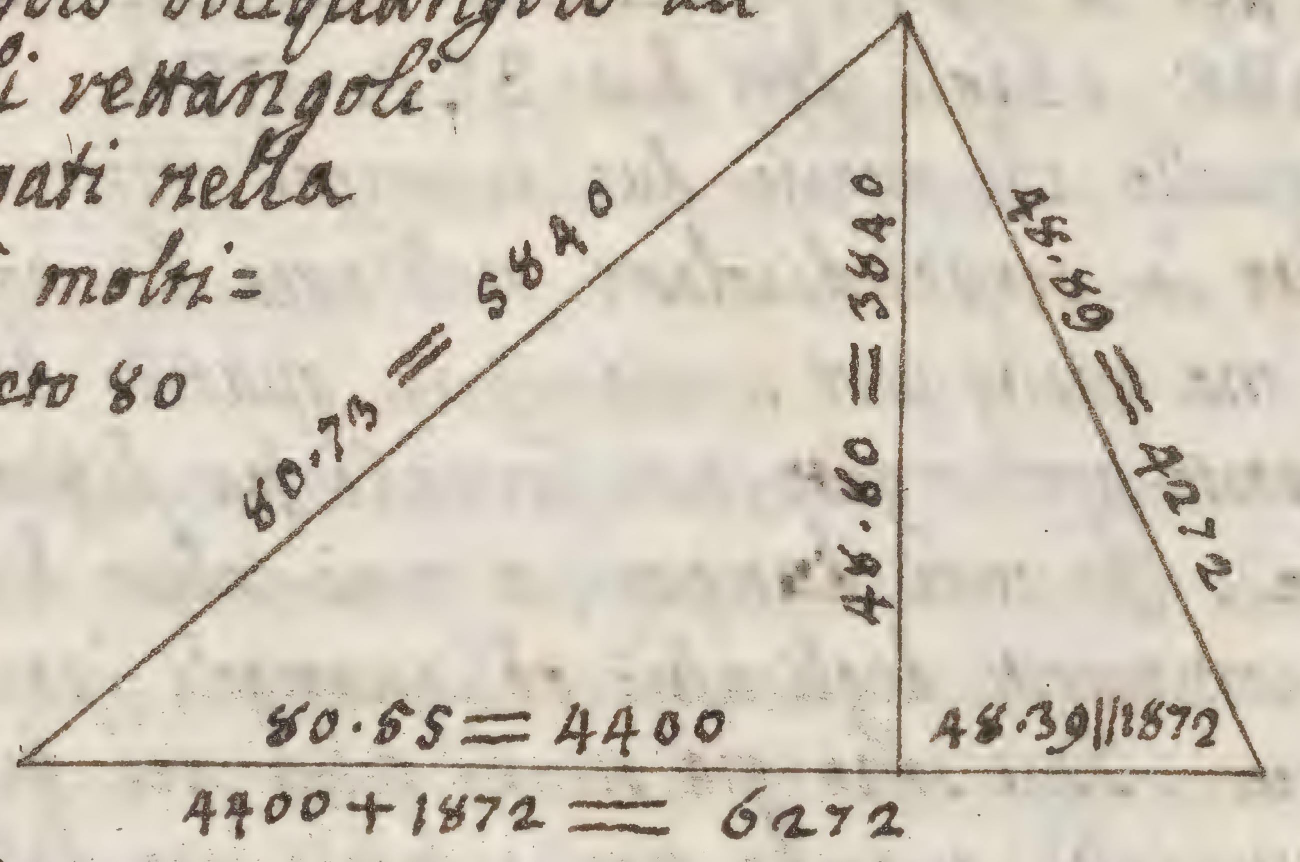
triangoli rettangoli. Li tre quadrati dei lati sono 289, 625, 784; e quindi gli altri cateti saranno — — $\frac{784+625-289}{2} = 560$; $\frac{784+289-625}{2} = 224$; $\frac{625+289-784}{2} = 65$. Moltiplicando poi i lati a due a due per formar le tre ipotenuse, li prodotti saranno $28 \cdot 25 = 700$; $28 \cdot 17 = 476$; $25 \cdot 17 = 425$. Essendo pertanto queste operazioni mesi per ordine una dopo l'altra a legge e metodo del teorema: si avranno li tre seguenti triangoli rettangoli costitutivi del triangolo acutangolo proposto, cioè $\frac{420:560}{700}$; $\frac{420:224}{476}$; $\frac{420:65}{425}$. Il primo ha per massimo divisore il 140; il secondo il 28; il terzo il 5. Dunque rabbassando i numeri con li rispettivi divisori, si trova, che $\frac{3:4}{5}$ è il primo costituente; $\frac{15:8}{17}$ il secondo; e $\frac{84:13}{85}$ il terzo.

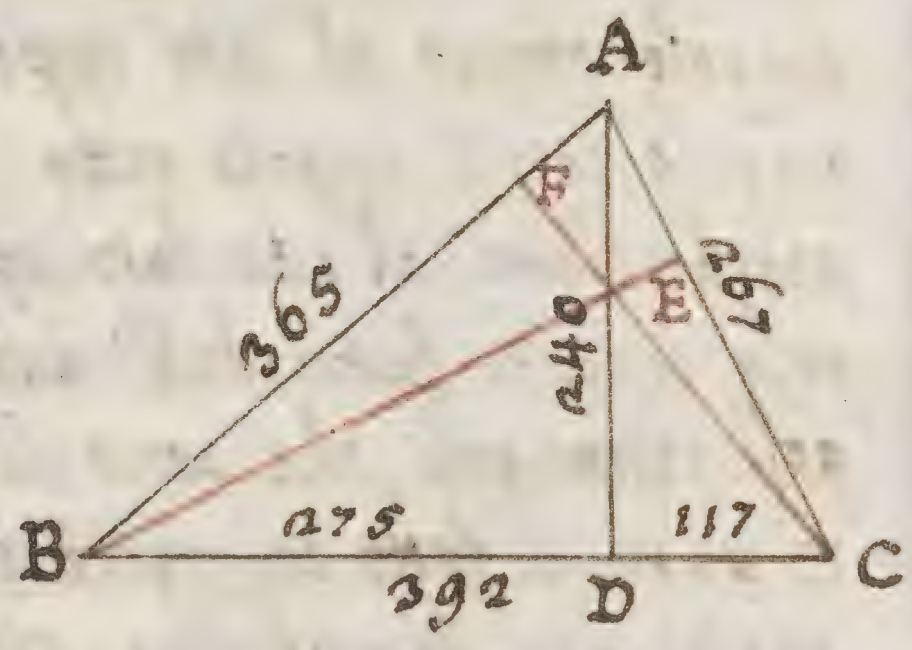
Per il triangolo ottusangolo, che per incidenza ha comuni due lati con l'acutangolo di sopra, e che ha eziandio l'area medesima 210; inoltre li suoi tre lati sono fra di se equidifferenti per il numero 11: il comune cateto è lo stesso 420. Facendo le consecutive operazioni, si trovano li quadrati 289, 784, 1521; le tre differenze dimezzate sono $\frac{1521+784-289}{2} = 1008$; $\frac{1521+289-784}{2} = 513$; $\frac{784+289-1521}{2} = -224$; e il prodotto de' lati a due a due $39 \cdot 28 = 1092$; $39 \cdot 17 = 663$; $28 \cdot 17 = 476$. Dunque li triangoli rettangoli costituenti sono $\frac{420:1008}{1092}$; $\frac{420:513}{663}$; $\frac{420:224}{476}$. Ridotti questi mediante li rispettivi loro massimi divisori 84, 3, 28, li costituenti si veggono essere, e si riscontrano nel picciol Albero della Genesi li seguenti $\frac{5:12}{13}$; $\frac{140:171}{221}$; $\frac{15:8}{17}$; le quali cose doveansi fare. Il secondo triangolo costituente si riscontra nel grand'Albero.

Problema II. *Se per la costruzion d'un triangolo obbliquangolo debbano congiugarsi in una perpendicolare medesima due cateti di due triangoli rettangoli, che non sia uno lo stesso che l'altro: il terzo triangolo, che costituisce il triangolo obbliquangolo composto sarà dato.*

Dalla Genesi per costituenti un triangolo obbliquangolo da costruirsi si tolgano li due triangoli rettangoli $\frac{48:55}{73}$; $\frac{80:39}{89}$; e saranno congiugati nella medesima perpendicolare, allorchè moltiplicando il cateto 48 di uno con un cateto 80 dell'altro, il prodotto 3840 costituisca al triangolo obbliquangolo la perpendicolare comune. Il cateto poi 80 moltiplicando il cateto 55, costituisca nel prodotto 4400 l'altro ~~prodotto~~ cateto; e moltiplicando anche l'ipotenusa 73, faccia l'ipotenusa 5840.







Reciprocamente il cateto 48 moltiplicando il cateto 39, costituirà altro cateto 1872; e moltiplicando l'ipotenusa 89, produrrà l'ipotenusa 4272. Per ultimo raccogliendo in summa li due cateti secondi $4400+1872 = 6272$: sarà costruito il triangolo obbliquangolo 5840, 6272, 4272, che ha per costituenti li due triangoli rettangoli proposti, congiugati in una medesima perpendicolare. Ma siccome tutti li prodotti fatti sin'ora hanno per comune massimo divisore il 16: così mediante la divisione il detto triangolo si riduce all'obbliquangolo ABC, in cui il lato AB = 365; la base BC = 392; il lato AC = 267; e la perpendicolare AD = 240; e tuttavia è composto dalli due proposti costituenti. Conviene adesso ritrovar il costituente terzo del triangolo obbliquangolo ABC.

Si moltiplichi la perpendicolare AD con la base BC; e il prodotto $240 \cdot 392 = 94080$ sarà il doppio dell'area del triangolo obbliquangolo; e per il teorema sarà conseguentemente un cateto del costituente, che si cerca. Sottrando il quadrato 153664 della base BC = 392 dalli due quadrati insieme $133225 + 71289 = 204514$ degli altri due lati AB = 365, AC = 267: nella metà 25425 della differenza si avrà il secondo cateto del costituente. ~~Questi numeri poi~~. Finalmente nel prodotto $365 \cdot 267 = 97455$ delli due lati AB AC si conseguirà l'ipotenusa di esso costituente. Questi numeri poi hanno il 15 per divisor massimo; e però fatta la divisione, li tre lati del costituente saranno $\frac{6272:1695}{6497}$. Se dunque dal vertice B dell'angolo B si tiri al lato opposto AC la perpendicolare BE; ovvero dal vertice C dell'angolo C si tiri al lato opposto AB la perpendicolare CF: l'uno e l'altro de' triangoli rettangoli simili BEA CFA sarà il costituente richiesto. Essendosi pertanto ritrovato il terzo triangolo rettangolo, che costituisce il triangolo obbliquangolo ABC composto dalli due dati triangoli congiugati in una perpendicolare medesima: esso terzo costituente sarà dato. Il che si doveva fare.

Scolio. Il triangolo costituente ritrovato ha la sua sede nell'ottava linea della Genesi dall'unità, ed è in essa il centesimo trigesimo sesto; e in tutto l'albero ha il luogo denominato denominato dal numero 1229. Tutto ciò si ritrae praticamente

praticando la regola descritta in essa Genesi, e nominata discendendo, con la quale nel Grand' Albero, dopo compiuta una sola di dette operazioni, si trova, che il costituente deriva dal triangolo laterale sinistro $\frac{3332:1245}{3557}$, che è nella settima linea, nel luogo quarantesimo sesto.

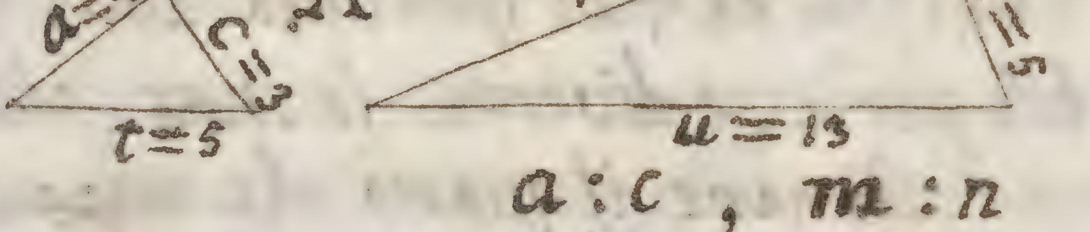
Teorema II. *Li triangoli obliquangoli, che si compongono dall' accoppiamento in qualunque modo reciproco in una medesima perpendicolare di due cateti d' un triangolo rettangolo con due cateti d' un altro triangolo rettangolo, che non sia lo stesso: sono quattro solamente di numero.*

Si debbano in qualunque modo reciproco accoppiare insieme in una medesima perpendicolare li due cateti a, c del triangolo rettangolo $\frac{a:c}{t}$ con li due cateti m, n del triangolo rettangolo $\frac{m:n}{u}$, che non è lo steso che il triangolo rettangolo $\frac{a:c}{t}$: dico primieramente, che questo accoppiamento non si può fare che in sole quattro maniere.

Imperciocchè per legge delle combinazioni, li quattro cateti a, c, m, n non si possono accoppiare insieme che in sei maniere, le quali sono ac, am, an, cm, cn, mn; ma la prima e l' ultima sono dei cateti fra di se nel loro triangolo; e solamente le quattro rimanenti intermedie accoppiano reciprocamente un cateto d' un triangolo con un cateto dell' altro triangolo: dunque l' accoppiamento in una medesima perpendicolare di due cateti di un triangolo reciprocamente con due cateti d' un altro triangolo rettangolo, che non è lo steso, non si può fare che in sole quattro maniere. Dico in secondo luogo, che li triangoli obliquangoli, che si compongono da un tale accoppiamento reciproco, sono quattro solamente di numero; poichè se li triangoli sono più di quattro, saranno eziandio più di quattro le perpendicolari, nelle quali si potranno accoppiar reciprocamente due cateti d' un triangolo rettangolo con due cateti d' un' altro; il che si è dimostrato impossibile: Dunque li triangoli obliquangoli che si compongono dall' accoppiamento in qualunque modo reciproco, con ciò che segue, sono quattro solamente di numero, come si dovea dimostrare.

Problema III. *Dati due triangoli rettangoli $\frac{a:c}{t}$, $\frac{m:n}{u}$ (Fig. A): costruire li quattro triangoli obliquangoli, che dai cateti di quelli si compongono.*

A



Dei due triangoli A si facciano quattro combinazioni differenti riguardo alla rispettiva località dei loro cateti, come rappresenta la figura B. Si faccia poi del primo cateto a col primo cateto m l' accoppiamento reciproco am, il quale costituirà la perpendicolare del primo triangolo obliquangolo. Si faccia del primo cateto a col secondo cateto n il reciproco accoppiamento na, e si avrà porzion della base del triangolo obliquangolo, cioè il segamento destro di essa, adjacente alla perpendicolare. Si faccia del cateto a con l' ipotenusa u l' accoppiamento reciproco ua, e si avrà il destro lato del triangolo obliquangolo. Si facciano somiglianti reciproci accoppiamenti del cateto m con ciascuno dei cateti c, t; e si avrà primieramente cm alla base altro segamento di esso alla sinistra, adjacente alla perpendicolare, e l' altro lato tm a parte sinistra del triangolo obliquangolo, la di cui perpendicolare con li lati successivi è indicata al numero I. Operando in tutto similmente, e con l' ordine steso nelle tre combinazioni, che seguono, dei due dati triangoli rettangoli, si troveranno come sopra primieramente le perpendicolari; poi li due lati laterali; in terzo luogo le basi dei proposti triangoli obliquangoli, come vengono indicati ai num.^ri II. III. IV.; il che è ciò, che doveasi fare.

B

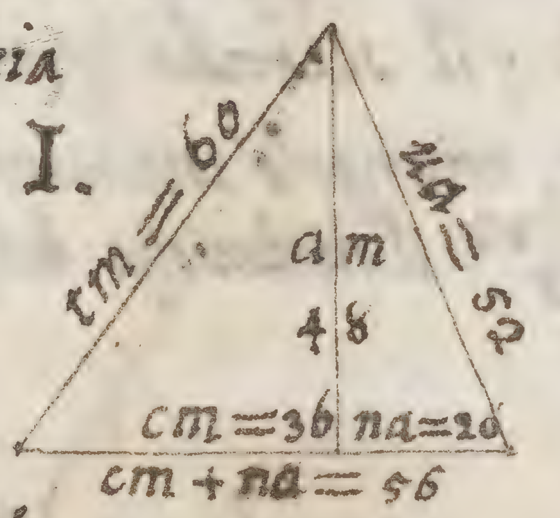
$\frac{a:c}{t}$, $\frac{m:n}{u}$

$\frac{a:c}{t}$, $\frac{n:m}{u}$

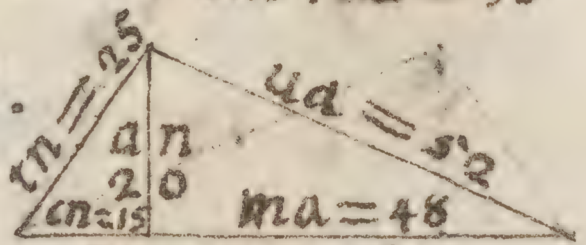
$\frac{c:a}{t}$, $\frac{m:n}{u}$

$\frac{c:a}{t}$, $\frac{n:m}{u}$

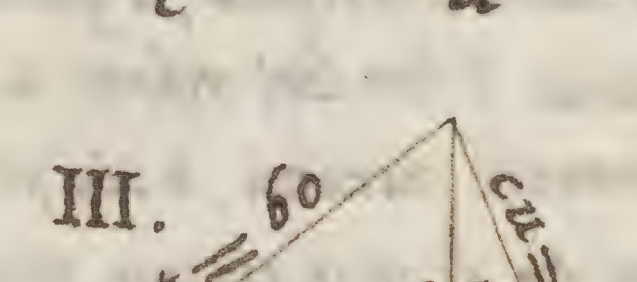
I.



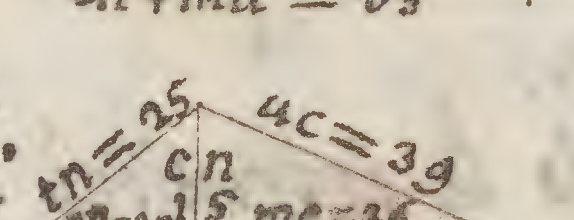
II.



III.



IV.



I. am ; tm, ua, cm+na

II. an ; tn, ua, cn+ma

III. cm ; tm, uc, am+nc

IV. cn ; tn, uc, an+mc

Problema IV. *Dopochè dei quattro triangoli obliquangoli ritrovati, sono conosciuti li due triangoli rettangoli simbolici costituenti $\frac{a:c}{t}$, $\frac{m:n}{u}$: ritrovare ancora simbolicamente di cadauno di quelli il terzo triangolo rettangolo costituente.*

Per il Teorema già noto, il doppio dell' area del triangolo è un cateto: dunque d' ognuno dei quattro obliquangoli essendo nota la perpendicolare: questa moltiplicata nella propria base darà nel prodotto un cateto del terzo triangolo costituente; e però $acm^2 + a^2mn$ sarà un cateto del terzo costituente il primo obliquangolo. Il secondo cateto è la metà della differenza, che nasce dal sottrarre il quadrato della base dalla

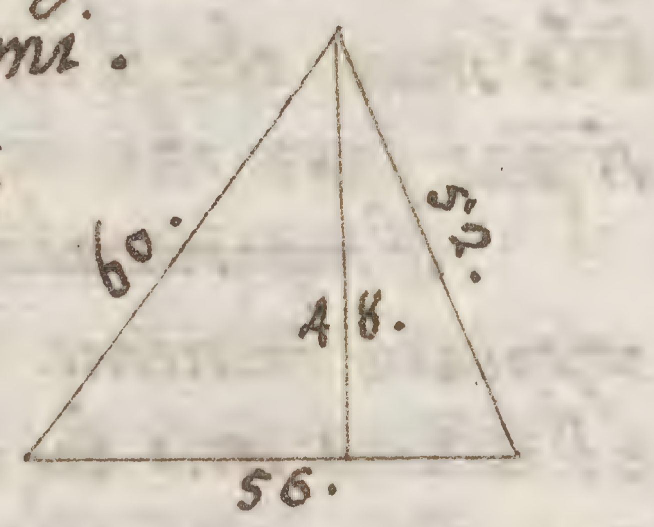
somma delli due quadrati degli altri due lati; $\frac{1}{2}(t^2m^2+u^2a^2-c^2m^2-2acmn-a^2n^2)$ sarà il secondo cateto del terzo costituente il primo obliquangolo. Finalmente essendo ipotenusa il prodotto dei due lati: la ipotenusa del costituente, che si cerca, sarà $amtu$. Si operi allo stesso modo per aver li costituenti degli altri obliquangoli: e tutti quattro saranno li seguenti, cioè dell'obliquangolo primo

$$\frac{acm^2+a^2mn \;:\; \frac{1}{2}(t^2m^2+u^2a^2-c^2m^2-2acmn-a^2n^2)}{amtu} \;;\quad \frac{acn^2+a^2mn \;:\; \frac{1}{2}(t^2n^2+u^2a^2-c^2n^2-2acmn-a^2m^2)}{antu}$$

$$\frac{acm^2+c^2mn \;:\; \frac{1}{2}(m^2t^2+c^2u^2-a^2m^2-2acmn-c^2n^2)}{cmtu} \;;\quad \frac{acn^2+c^2mn \;:\; \frac{1}{2}(t^2n^2+u^2c^2-a^2n^2-2acmn-c^2m^2)}{cntu}$$

; e li tre successivi sono per ordine li triangoli rettangoli terzi, che costituiscono il secondo, terzo, e quarto degli obliquangoli.

Esercizio per numeri, come si veggono applicati alle Figure. Per maggior agevolezza gioverà d'ogni obliquangolo ridurre i lati, e la perpendicolare a termini minimi.



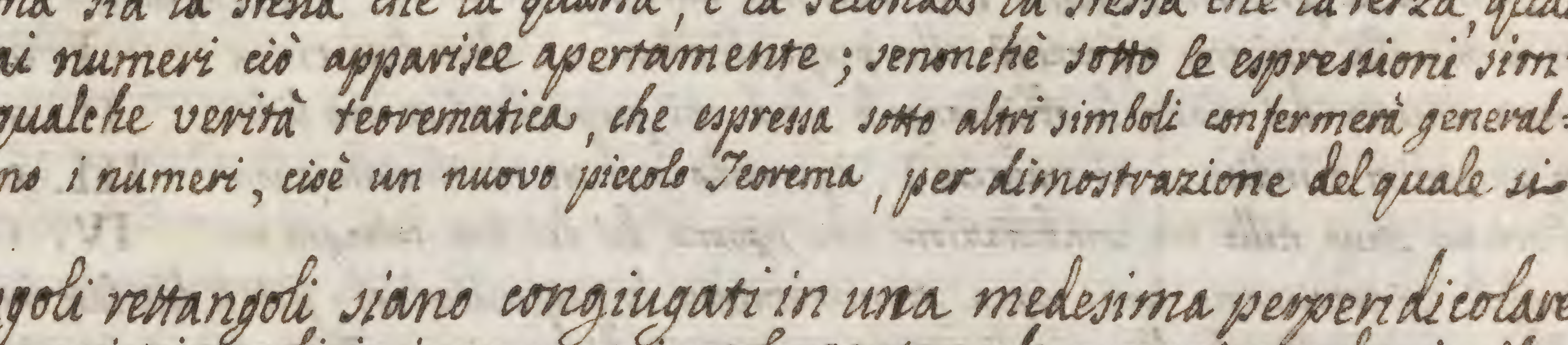
A cagion d'esempio si riduce il primo col divisor 4 a deprimer i lati ai numeri 15, e 13; la base al numero 14, e al numero 12 la perpendicolare; e quindi il 12 della perpendicolare moltiplicando il 14 della base produce 168 per il primo cateto. La metà 99 della differenza 198, che nasce sottraendo il quadrato 196 della base 14 dalli due quadrati $225+169=394$ delli due lati 15, 13 è il secondo cateto. Per ultimo si ha l'ipotenusa 195, moltiplicando fra di se i lati $15\cdot13=195$; e in complesso risulta il costituente $\frac{168:99}{195}$. Ma questo avendo pure il 3 per divisor massimo, si riduce al seguente triangolo $\frac{56:33}{65}$, che nella Genesi dall'unità ha il settimo posto nella 3.ª linea.

Non si può abbassare il secondo obliquangolo, perchè non ha divisor comune; e però il primo cateto è $20\cdot63=1260$; il secondo è $\frac{1}{2}(25^2+52^2-63^2)=\frac{1}{2}(-625-2704+3969)=320$, cioè triangolo ottusangolo; e si trova l'ipotenusa $25\cdot52=1300$, onde il costituente sia $\frac{1260:320}{1300}$, che ha per massimo divisor il 20, per cui diventa $\frac{63:16}{65}$, che nella Genesi suddetta è Platonico per esser nell'ultimo luogo della 4.ª linea.

Si abbassa il terzo dividendo per 3; e li valori numerici saranno, cioè la perpendicolare 12, la base 21; e 20, e 13 li due lati. Dunque un cateto $12\cdot21=252$; l'altro cateto $\frac{1}{2}(20^2+13^2-21^2)=\frac{1}{2}(400+169-441)=64$; e l'ipotenusa $20\cdot13=260$, e si abbia per costituente $\frac{252:64}{260}$, che in ogni suo lato è divisibile per 4, e diventa lo stesso, che abbiam trovato nel secondo obliquangolo $\frac{63:16}{65}$.

Rimane il quarto che neppur esso permette di abbassarlo, mancando di divisore. Il suo primo cateto è $15\cdot56=840$; il secondo $\frac{1}{2}(25^2+39^2-56^2)=\frac{1}{2}(-625-1521+3136)=495$ ottusangolo; e l'ipotenusa $25\cdot39=975$, triangolo costituente $\frac{840:495}{975}$; ma che essendo divisibile per 15 si converte nel rettangolo della Genesi $\frac{56:33}{65}$ il medesimo del primo obliquangolo.

Figure delli quattro triangoli obliquangoli del presente Problema, li quali hanno li loro lati ridotti a numeri minimi, o sia primi fra di se in ciascun triangolo.

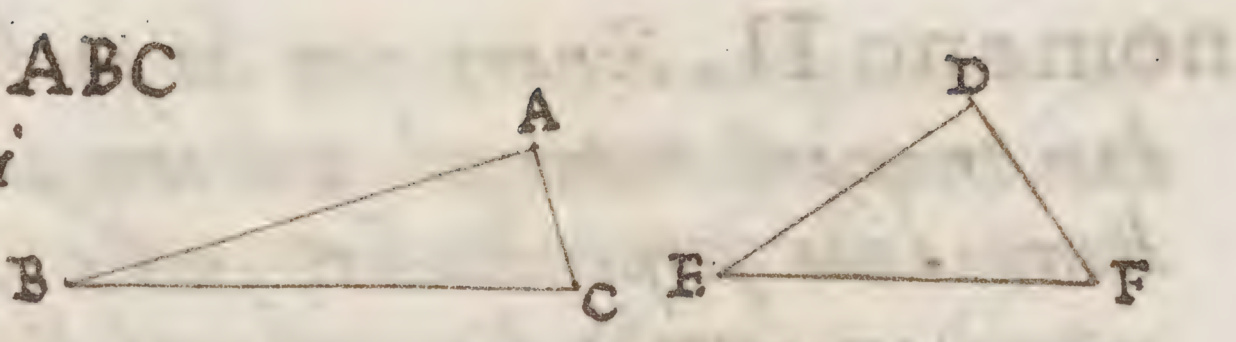


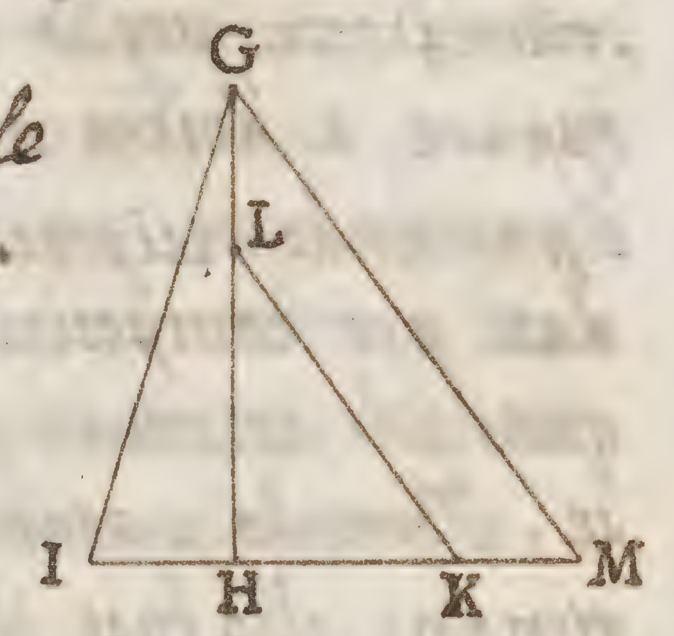
Fenomeno. Considerando le espressioni simboliche nel Problema IV, pare oltremodo lontano dal credere, che la prima sia la stessa che la quarta, e la seconda la stessa che la terza, quando per l'applicazione ai numeri ciò apparisce apertamente; sennonchè sotto le espressioni simboliche si racchiuderà qualche verità teorematica, che espressa sotto altri simboli confermerà generalmente, quanto manifestano i numeri, cioè un nuovo piccolo Teorema, per dimostrazione del quale si premette il seguente

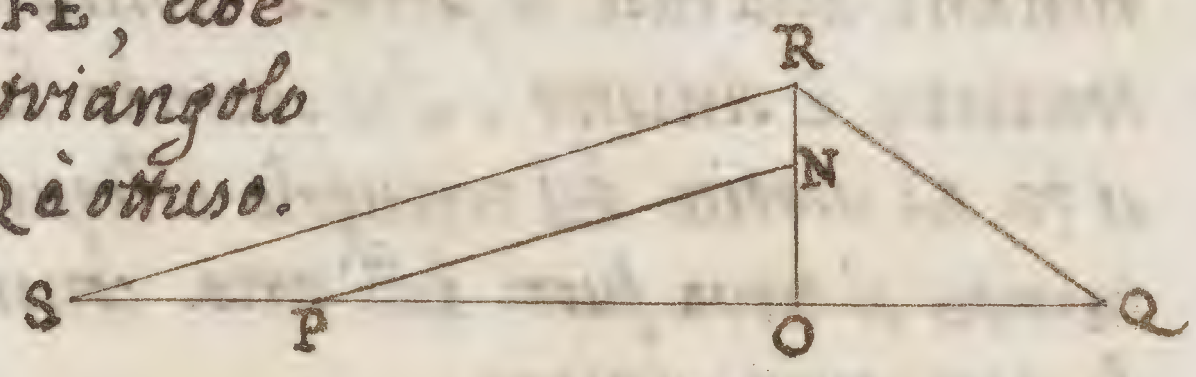
Lemma. Se di due triangoli rettangoli siano congiugati in una medesima perpendicolare due cateti, e costituiscano essi triangoli insieme un triangolo acutangolo: congiugando similmente in una medesima perpendicolare gli altri due cateti dei triangoli medesimi, questi costituiranno un triangolo ottusangolo; e viceversa.

Siano li due triangoli rettangoli ABC DEF; e tirate ad angoli retti fra di se le due linee rette GH IM, si faccia la HG uguale al cateto AB, e l'HI uguale al cateto AC. Si faccia inoltre l'HL uguale al cateto DE, e l'HK uguale al cateto DF, e giungansi le rette GI LK; e li due triangoli HGI HLK saranno li medesimi che li due rettangoli ABC DE. Per il punto G si tiri la GM parallela alla LK; e il triangolo GHM sarà simile al triangolo LHK, ovvero DEF; e li due cateti AB DE delli triangoli ABC DEF saranno per tal modo congiugati

nella medesima perpendicolare GH, che li due triangoli rettangoli ABC DEF, cioè HGI HGM costituiranno il triangolo GIM. Tirate poi eziandio ad angoli retti fra di se le due linee RO SQ, si faccia la ON uguale al cateto AC, e la OP uguale al cateto AB; e similmente la OR uguale al cateto DF, e la OQ uguale al cateto DE; e giunte le NP RQ, li due triangoli ONP ORQ saranno li medesimi che li due rettangoli ACB DFE. Per il punto R si tiri la RS parallela alla NP, e il triangolo ROS sarà simile al triangolo NOP, ovvero DFE; e gli altri due cateti AC DF degli stessi triangoli ABC DEF saranno per tal modo congiugati nella medesima perpendicolare RO, che li due triangoli rettangoli ACB DFE, cioè ORS ORQ costituiranno il triangolo RSQ. Abbia pertanto il triangolo GIM l'angolo IGM acuto: dico, che del triangolo RSQ l'ang.° RSQ è ottuso.



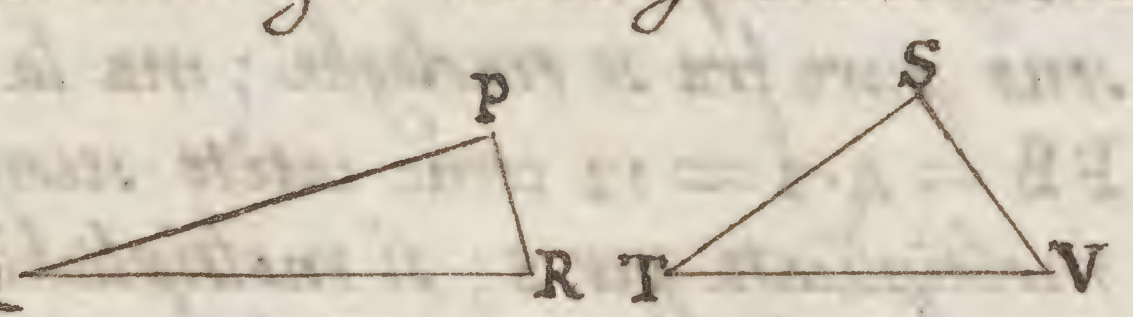




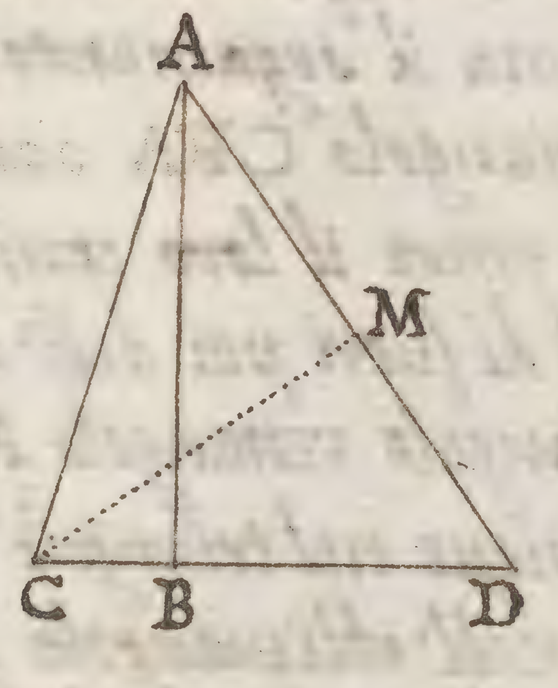
Imperciocchè essendo l'angolo BAC retto, saranno uguali ad un retto gli altri due ABC ACB; e per la medesima ragione sono uguali ad un retto gli angoli DEF DFE; e però tutti quattro insieme saranno uguali a due retti; ma l'angolo ABC è uguale all'angolo HGI, e l'angolo DEF all'angolo HGM; come pure l'angolo ACB all'angolo ORS, e DFE all'angolo ORQ: dunque ancora gli angoli HGI HGM ORS ORQ sono uguali a due retti; ma li primi due costituiscono un angolo acuto IGM, cioè minore del retto: dunque li due rimanenti costituiranno un angolo maggiore del retto; e perciò l'angolo SRQ è ottuso. Per la qual cosa se due triangoli rettangoli siano congiugati con quel che segue; il che è ciò, che doveasi dimostrare.

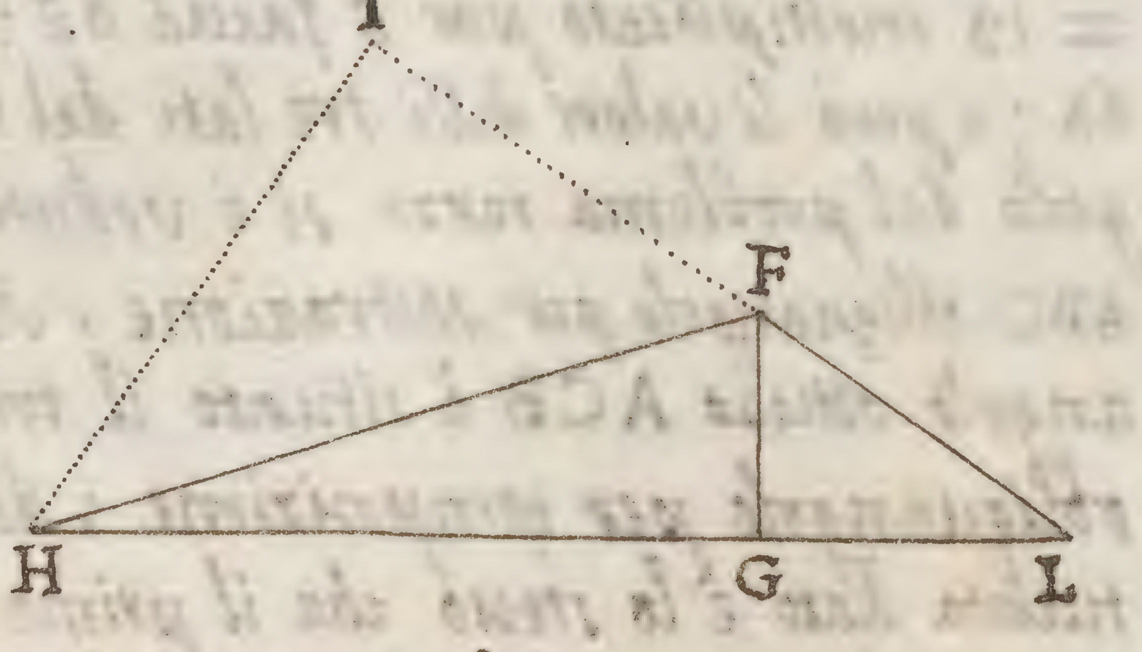
Corollario. Dalla dimostrazione apparisce chiaramente, che li due angoli IGM SRQ sono reciprocamente l'uno all'altro complementi a due retti.

Teorema recente. 8 Ottobre 1782. Se due triangoli rettangoli congiugati con due cateti in una medesima perpendicolare nel modo superiormente descritto, costituiscano un triangolo; e congiugati con gli altri due cateti ne costituiscano un altro: il terzo triangolo rettangolo costituente di uno d'essi sarà eziandio terzo costituente dell'altro.



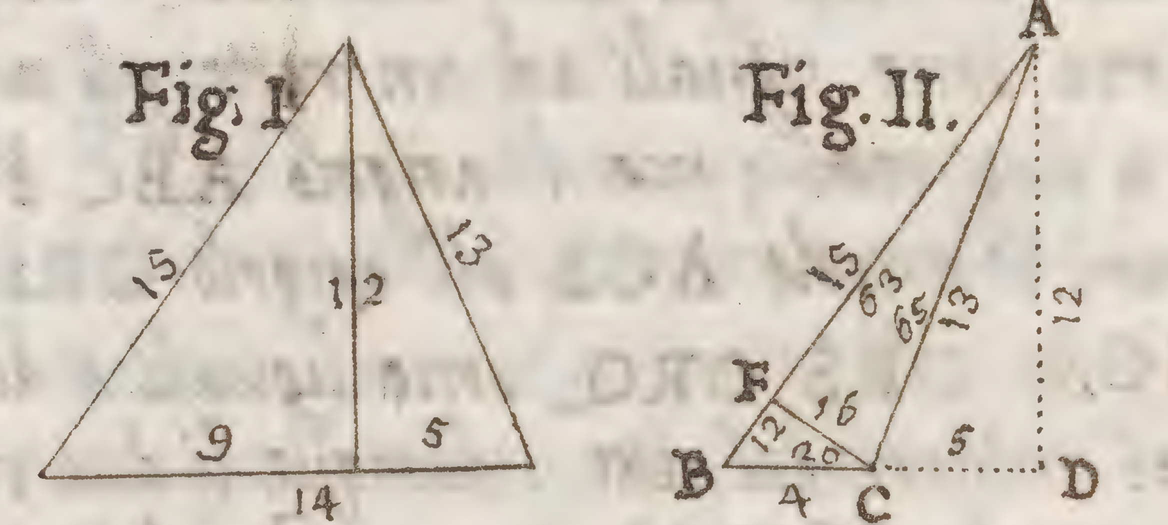
Siano li due triangoli rettangoli PQR STV e congiugati, come si è detto superiormente nella perpendicolare AB con li due cateti PQ ST facciano li due triangoli rettangoli ABC ABD, che costituiscano il triangolo ACD; e congiugati con gli altri due cateti PR SV nella perpendicolare FG facciano li due triangoli rettangoli FGH FGL, che costituiscano il triangolo FHL: è manifesto, che li due triangoli ABC HGF sono equiangoli fra di se, e al triangolo PQR; e fra di se sono ancora equiangoli li triangoli ABD LGF, e al triangolo STV; e inoltre per il Lemma antecedente se l'angolo CAD è acuto, l'angolo HFL sarà ottuso e viceversa. L'angolo CAD sia acuto; e per il seguente Corollario l'angolo ottuso HFL sarà con l'angolo acuto CAD complemento a due retti. Si prolunghi il lato LF in I; e per li punti C H si tirino le perpendicolari CM HI alle rette AD LI: il triangolo rettangolo CMA sarà il terzo costituente del triangolo ACD; e il triangolo rettangolo HIF per le cose dette di sopra sarà il terzo costituente del triangolo FHL. Dico, che il triangolo CMA è ~~lo stesso~~ equiangolo al triangolo HFI, cioè che il triangolo rettangolo CMA è lo stesso che il triangolo rettangolo HFI.



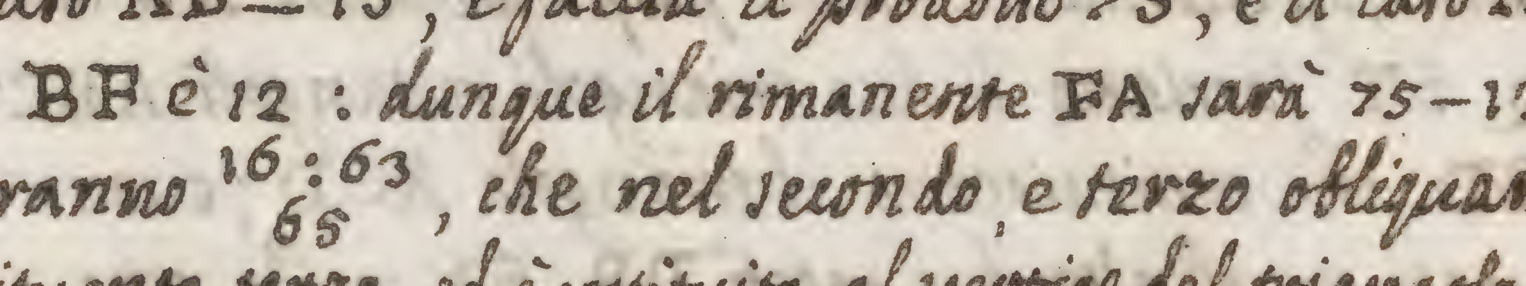


Imperciocchè essendo l'angolo ottuso HFL complemento a due retti non solo con l'angolo CAD per ciò che si è dimostrato, ma ancora con l'angolo HFI per la proposizion 13 del primo degli Elementi: sarà l'angolo CAD uguale all'angolo HFI; l'angolo poi al punto M retto è uguale al retto al punto I: dunque l'angolo rimanente ACM è uguale al rimanente FHI; e però il triangolo CMA è equiangolo al triangolo HFI, e conseguentemente quello è lo stesso che questo. Laonde se due triangoli rettangoli congiugati con due cateti in una medesima perpendicolare &c. la qual cosa era d'uopo dimostrare.

Fenomeno II. *Finora non ho parlato, che di que' triangoli obliquangoli, che si costituiscono di due dati triangoli rettangoli per composizione, voglio dire quando uno è a parte sinistra, e l'altro a parte destra della perpendicolare, nella quale sono ambedue congiugati; ma quando fossero costituiti per sottrazione, voglio dire con ambedue li triangoli rettangoli a parte sinistra di detta perpendicolare, oppure a destra ambedue: merita osservazione il vedere, come li terzi costituenti cambiano luogo; e passando reciprocamente da un triangolo all'altro, divengono anzi alcuno delli due costituenti dati per composizione. A ciò, che ho detto, apparisce manifestamente, che tutti li triangoli obliquangoli costituiti per sottrazione sono ottusangoli, e che l'angolo ottuso è sempre situato alla base. Tirando pertanto dall'angolo ottuso una perpendicolare al lato opposto, dico primieramente, che rimane alla base il primo costituente dell'obliquangolo per composizione, qualora il triangolo di sottrazione è sinistro. In secondo luogo quel triangolo rettangolo, che dovrebbe esser terzo costituente si fa al vertice del triangolo obliquangolo uno dei costituenti dati per composizione; e per terzo costituente si trova fuori dell'area consecutivo all'angolo ottuso il dato costituente secondo dell'obliquangolo per composizione.*



Imperciocchè prendendo dal terzo problema il primo triangolo per composizione, abbia assegnati in numeri li valori convenienti alla di lui costruzione (Fig. I.); e li lati saranno 15, 13; la base 14, e li suoi segamenti 9, 5; e 12 la perpendicolare. Si faccia poi il triangolo ABC per sottrazione (Fig. II.), li di cui lati 15, 13 saranno tuttavia li medesimi; ma sottraendo il segamento 5 minore dal maggior segamento 9: la base del triangolo ABC sarà 4, sussistendo la stessa la perpendicolar AD = 12; e l'angolo ACB alla base sarà ottuso, dal quale si tiri all'opposto lato la perpendicolare CF. Sono dunque simili fra di se li due triangoli rettangoli ABD CBF, perchè hanno comune l'angolo ABD; ma il triangolo ABD è il primo costituente: dunque eziandio il triangolo CBF è costituente primo. L'ipotenusa 5 del primo triangolo dato nel terzo problema è omologa all'ipotenusa BC del triangolo CBF; e però 4·5 = 20 = CB. Le perpendicolari AD CF sono pure fra se omologhe; ma la AD = $\frac{12}{3}$ = 4: dunque CF = 4·4 = 16; e per conseguenza FB = 4·3 = 12 come cateto secondo. Per la qual cosa essendo il 4, cioè la base del triangolo ABC moltiplicata per 5, si moltiplichi ancora per 5 il lato AB = 15, e faccia il prodotto 75, e il lato AC = 13 moltiplicato per 5 faccia 65; ma il segamento BF è 12: dunque il rimanente FA sarà 75−12 = 63; e però li valori delli tre lati del triangolo CFA saranno $^{16\,:\,63}_{\;\;65}$, che nel secondo, e terzo obliquangolo del problema terzo si è veduto essere il loro costituente terzo, ed è costituito al vertice del triangolo ABC obliquangolo per sottrazione. Al di fuori poi dell'area del detto obliquangolo consecutivamente all'angolo ottuso ACB è situato il triangolo rettangolo ADC $^{12\,:\,5}_{\;\;13}$ secondo costituente dato del triangolo obliquangolo per composizione: dunque nel triangolo obliquangolo ABC per sottrazione il primo costituente dato è lo stesso che il primo nell'obliquangolo per composizione; il secondo costituente è il ~~terzo~~ triangolo rettangolo al vertice, che nel secondo e terzo obliquangolo del terzo problema è il costituente terzo; e finalmente il terzo costituente è il ~~terzo~~ secondo dei costituenti l'obliquangolo primo per composizione.



Si prenda ora il triangolo per composizione distinto pur esso co' numeri, che lo caratterizzino per l'obliquangolo secondo del terzo problema (Fig. I.); e i lati saranno 25, 52; la base sarà 63, e 15, 48 li due segamenti di essa fatti dalla perpendicolare 20; e nel modo praticato di sopra si faccia il triangolo ABC per sottrazione (Fig. II.), che come si è detto sarà anche destro, e li di cui lati 25, 52 sussistono; ma cangia di valore la base, che diventa (appunto per la sottrazione) 48 − 15 = 33, stando ferma la perpendicolare AD = 20. Dall'angolo ottuso C si tiri all'opposto lato la perpendicolare CF; e si dimostrerà come prima, che li triangoli rettangoli ABD CBF sono simili; ma il triangolo ABD è costituente secondo: dunque ancora è secondo costituente CBF. L'ipotenusa 13 del secondo triangolo dato nel terzo problema è omologa all'ipotenusa BC = 33 del triangolo CBF; e però 13·33 = 429 = BC. Così pure sono omologhe le perpendicolari AD CF; ma la AD = $\frac{20}{4}$ = 5: dunque CF = 5·33 = 165, e

conseguentemente $FB = 396$. Quindi la base BC del triangolo ABC essendo 33 moltiplicata per 13, devesi fare lo stesso degli altri due lati AB AC, e si avrà per quello $13 \cdot 52 = 676$, e per questo $13 \cdot 25 = 325$; ed essendo $AB - BF = FA$, si avrà $676 - 396 = 280$; cosicchè del triangolo rettangolo AFC li tre lati sieno $\overset{280 : 165}{325}$ tutti divisibili per 5, per cui si riducono al triangolo $\overset{56 : 33}{65}$, terzo costituente del primo, e quarto obliquangolo nel terzo problema, quando si può dire il secondo nel presente obliquangolo di sottrazione, quando si voglia considerare come triangolo di composizione, nel qual caso il suo terzo costituente è il triangolo ADC $\overset{4 : 3}{5}$. Dunque per ultima conclusione negli obliquangoli per sottrazione li terzi costituenti passano reciprocamente dai triangoli obliquangoli di composizione nel modo superiormente dichiarato; il che si dovea dimostrare.

Problemi, che ho proposti agli Alunni del Collegio Militare secondo le materie, che mi furono ingiunte, e secondo la rispettiva loro capacità, il dì 30 Agosto, e 2 Settembre 1777 ultimo del sessennio alla presenza dell' Ill.mo ed Ecc.mo Sig.r Zaccaria Valeresso Savio alla Scrittura Uscito in occasione della loro partenza dal Collegio medesimo.

Alla prima Classe.

I. Un cono retto ha oncie 100 per diametro della base, e l'angolo al vertice del triangolo per l'asse è 73°.28': si dimanda, quanti piedi sia la sua solidità.

5980915, 8014278 sono il seno, e coseno di $\frac{73°.28'}{2} = 36°.44'$; e facendo l'analogia, che segue 5980915 : 8014278 :: 100 : 67, il quarto termine mostra l'altezza del cono esser onc.e 67. e però fatta altra analogia di 7 : 22, così il quadrato del raggio della base, cioè 2500 : 7857 si ottiene in punti l'area della base medesima, la quale moltiplicata nell' altezza 67 e diviso il prodotto per 3, costituisce la solidità del cono in atomi solidi 175473, cioè piedi cubici 101, oncie 6, punti 6, atomi 9.

La lunghezza d'un corpo di terra di figura rettangola è pertiche 113 : 4 : 8, e pert.e 97 : 3 : 11 la sua larghezza: si dimanda la sua quantità superficiale espressa in campi, vanezze con le altre consecutive denominazioni.

È campi 15, vanezze 10, tavole 10, piedi 25, oncie 9, punti 4.

II. Date oncie 198 per altezza d'un cono retto, la di cui solidità è atomi 173052: trovare l'angolo al vertice del triangolo per l'asse.

Dividendo la solidità per 66 terza parte dell' altezza, si trova per quoziente il 2622 area della base circolare; col mezzo della quale facendo l'analogia 22 : 7 :: 2622 : 834 $\frac{3}{11}$, e dal quarto termine estratta la radice quadrata $\frac{201753}{6985}$, ovvero oncie 29, si avrà il suo raggio. Con la seconda analogia 198 : 29 :: 10000000 : 1464646 $\frac{46}{99}$ si conseguisce la tangente della metà dell' angolo, che si cerca; alla quale corrispondendo 8°.19'.49", l'angolo al vertice è 16°.39'.38".

La quantità d'un terreno è campi 2, tav. 9, pied. 28 : 9 : 4; e la sua larghezza è pertiche 31 : 5 : 10, si dimanda, quanta sia la sua lunghezza. È pert.e 47 : 1 : 4.

III. Il lato d'un cono retto è oncie 85; e la superficie conica è punti 3472 $\frac{6}{7} = \frac{24310}{7}$: ritrovar l'angolo del triangolo per l'asse.

Dividendo il doppio della superficie per il lato, si trova $\frac{572}{7}$ per la circonferenza della base del cono. Fatta l'analogia 44 : 7 :: $\frac{572}{7}$: 13, si ha il raggio della medesima; e fatto poi 85 : 13 :: 10000000 : 1529418, si ha il seno di 8°.47'.51", che raddoppiato, cioè 17°.35'.42" è l'angolo del cono.

Una piccola campagna a L.648 il campo costa L.10224 : 4, ed è lunga pert.e 156 : 2, si vorrebbe sapere, quanto è larga. Ascendendo a camp. 15 : 18 : 20 : 8, è larga pert.a 72 : 4.

IV. Trovar per logaritmi la radice $\sqrt[13]{8192}$.

Questa radice si può esprimer così $\sqrt[13]{8192^8}$; e però si moltiplica per l'esponente potenziale 8 il Logaritmo 39133900 del numero 8192, e si divide il prodotto 313071200 per l'esponente radicale 13; poichè il quoziente 24082400 è il logaritmo della radice proposta 256.

Un Orto fu pagato L.3583 : 13 a L.1296 il campo: si ricerca la sua quantità in campi, vanezze e successive denominazioni. È campi 2, van. 18, tav. 10, pied. 33, onc. 2, pun. 8.

V. Trovar per logaritmi la potenza $2187^{\frac{8}{7}}$.

Il logaritmo del numero dato è 33398488, il quale moltiplicato per il numerator della frazione esponenziale darà di prodotto 267187904; e questo poi diviso per il denominatore dà il logaritmo 38169700, a cui corrisponde il 6561 per la potenza $2187^{\frac{8}{7}}$.

Vn Cortile di figura triangolare ha per lati misurati a piedi 179, 181, 196: si vorrebbe sapere la sua quantità in vanezze, tavole, piedi, oncie, e punti.

Esso è piedi quadrati 14795, onc. 7:3; cioè van. 13, tav. 20, pied. 35:7:3.

VI. Per logaritmi trovar il Capitale, che occorre per lucrar ₰ 133 in mesi 4, dopochè ₰ 3648 in mesi 8 hanno guadagnato ₰ 152.

Il tempo è in ragion inversa de' Capitali; e però ordinando la regola di proporzione composta, sarà 152.4 : 3648 :: 133.8 : x; e sostituendo li logaritmi, si avrà 2181436 + 0602060 · 3562054 8 ∴ 2123851 6 + 0903900 · x; cioè 2783903 6 · 3562054 8 ∴ 3026941 6 · 3805092 8. Al quarto logaritmo corrisponde il numero 6384; e tanti Ducati appunto corrispondono per il Capitale richiesto.

Vna porzion di Campagna ha la figura d'un trapezio di due lati paralleli, uno de' qual è pert.e 103:5:7:9; l'altro pert.e 85:-:4:3; e sono fra se distanti pert.e 37:-:-:11. Si dimanda la sua quantità in campi, vanezze &. È Cam. 7, van. 21, tav. 1, pied. 14:7:6

VII. Li due numeri 4913, 6859 devono esser inalzati cadauno alla potenza settima; e queste due potenze devono poi esser fra di se moltiplicate; e finalmente il prodotto ha da esser diviso dalla potenza 21 del numero 323: si dimanda il suo quoziente, cioè $\frac{4913^7 \cdot 6859^7}{323^{21}}$.

Perchè tutte queste operazioni per numeri assoluti sarebbono estremamente faticose, convien chiamare in ajuto i logaritmi. Pertanto 36913464 è logar. del 4913; 38362608 è quello del 6859; e per il 323 si ha il logar. 25092025. Fatta la somma 75276075 delli due primi si moltiplichi per 7, e faccia il prodotto 526932525, il quale sarà il logaritmo del prodotto fatto dalle due potenze settime fra di se moltiplicate delli due numeri proposti 4913, 6859. Il terzo logaritmo si moltiplichi per 21, e faccia il prodotto 526932525 il quale uguagliandosi a quello delle prime potenze moltiplicate, lascia il zero per differenza. Dunque l'unità è il quoziente desiderato.

Di un terreno rettangolare fu misurata la larghezza che è pertiche 225, e pertiche 353 la sua diagonale: si desidera sapere, quanti campi egli sia.

La lunghezza è pertiche 272: dunque è campi 85 in punto.

VIII. Vn triangolo rettangolo ha per cateti li due numeri 696, 697: trovar il valore degli angoli sottoposti a quelli.

Si trovi l'ipotenusa 985; e poi si faccia l'analogia 985 : 696 :: 10000000 : 7065990, poichè il quarto proporzionale sarà il seno dell'angolo sottoposto al cateto 696. Questo seno riscontrato nelle Tavole corrisponde a 44°. 57'. 32" valor del detto angolo, e conseguentemente l'altro angolo è 45°. 2'. 28".

Ovvero fatta l'analogia 696 : 697 :: 10000000 : 10014369, il quarto termine è la tangente dell'angolo sottoposto al cateto 697, alla quale corrispondono 45°. 2'. 28" come sopra.

Per il cavamento d'una fossa larga superiormente piedi 7:9, e piedi 4:8 nel fondo; profonda piedi 5:6, e lunga pertiche 97:2:7, si è fatto il contratto in soldi 12 la pertica cubica: si dimanda quante lire costerà questo lavoro.

Il cavamento è piedi cubici 19961:1:-:3, cioè pertiche cubiche 92:89:1:-:3; e importa £ 55:4:11 $\frac{337}{864}$.

IX. L'ipotenusa d'un triangolo è 353, la quale ha un angolo adjacente di 50°. 24'. 8" $\frac{166}{1854}$: ritrovare li due cateti.

Il seno dell'angolo dato è 7705382 $\frac{154}{353}$; e quindi fatta l'analogia 10000000 : 7705382 $\frac{154}{353}$ :: 353 : 272, si avrà un cateto nel quarto termine, il di cui quadrato 73984 sottratto dal quadrato 124609 dell'ipotenusa, lascia 50625 quadrato dell'altro

tro cateto; e però estratta la radice 225, essa è il secondo cateto.

Si deve fabbricare un pozzo, per cui è necessario un cavamento di terra di figura cilindrica; la base circolare ha per diametro piedi 7:8, e l'altezza è piedi 28:7. Per ogni pertica cubica di cavamento si pagheranno £ 10:16; e perciò se ne dimanda la spesa.

Usando la ragion di 7:22, la base circolare sarà punti superficiali $6650\frac{2}{7}$; e tutto il solido sarà atomi 2281048, cioè piedi 1320:–:7:4, ovvero pertiche cubiche 6, piedi 24, oncie 0, punti 7, atomi 4, che importano £ 66:–:–:$\frac{11}{18}$

X. *Trovar un numero per logaritmi, a cui il 9400 abbia la ragion prossima, che hanno fra di se le due potenze 252^{24} : 6006^{15}.*

Il 252 ha 24014005 per logaritmo, il quale moltiplicato per 24 esibisce nel prodotto 576336120 il logaritmo della prima potenza. Il 6006 ha per logaritmo 37785853 che moltiplicato per 15 costituisce il logaritmo 566787795 della seconda potenza. Sottratto il minor dal maggiore si ha la differenza 9548325. Il logaritmo 39731279 è quello del dato numero 9400; e da esso logaritmo sottratta la differenza già detta, lascia il numero 30182954, che il logaritmo del richiesto numero $1043\frac{111}{4162}$; cosicchè assai prossimamente si abbia $9400 : 1043\frac{111}{4162} :: 252^{24} : 6006^{15}$

Calcolata la superficie d'una possessione, si è ritrovata campi 103, van. 7, tav. 19 e pied. 29. Stimata ℔ 209:–:4 dal grosso in ragion di campo: si chiede, quanti Ducati vaglia.

Vale ℔ 21597, £ 0:5.

XI. *Per logaritmi trovar il valor degli altri due lati d'un triangolo, che ha per lato minimo il 4164; e gli angoli procedono con la differenza di 17°. 41'.*

In questo problema, qualunque sia la differenza, l'angolo di 60°, cioè la terza parte di 180°, che uguagliano due retti, è sempre il medio; e perciò levando da esso li 17°.41' si avrà per angolo minimo 42°.19', che è sottoposto al lato minimo 4164; e aggiungendoli, si avrà l'angolo massimo 77°.41'. Tolti dalle tavole trigonometriche li tre senilogaritmi 9.8281619, 9.9375306, 9.9898873 dei detti angoli col logaritmo 3.6195101 del dato numero 4164; e fatte due analogie, nelle quali il primo termine è sempre il senilogaritmo minimo, è il secondo è il logaritmo del numero dato: si conseguiranno li due logaritmi 3.7288794, 3.7812361 per gli altri due lati, i quali si riscontrano esser, cioè il lato medio $5356\frac{388}{816}$, e il lato massimo $6042\frac{554}{719}$.

Calcolato un terreno col piede Veronese si è trovato camp. 28, van. 8, tav. 18, pied. 27: si cerchi, quanto sia, se fosse misurato col piede Veneto, a cui il Veronese ha la ragion de' numeri 54 : 55.   È camp. 27, van. 8, tav. 3.

XII. *Trovar l'area d'un parallelogrammo, un di cui angolo è gradi 123°.11', e il prodotto de' due lati è tavole 258, piedi 24, oncie 3.*

Il problema sembra forse mancante di qualche condizione, affinchè sia solubile; ma il fatto è, che non ha bisogno di nulla, perchè il parallelogrammo, purchè abbia l'angolo dato, e che i lati facciano sempre il dato prodotto, non cangerà mai di grandezza, per qualunque proporzione abbiano i suoi lati fra di se, anche se uno fosse uguale all'altro come un rombo; e ciò per la proposizione 14 del libro 6. Si consideri dunque che il parallelogrammo sia un rombo; e perciò convertito il prodotto in punti 1340964 si estragga da essi la radice quadrata 1158, la quale, com'è manifesto, determina in oncie la lunghezza del lato del rombo medesimo. Questo lato si conosce con ugual chiarezza che rappresenta un'ipotenusa sottoposta alla perpendicolare, che da un angolo del rombo cade sopra il lato opposto, e che conosciuta, e moltiplicata in esso costituisce la sua area. Dunque per Trigonometria tolto il senilogaritmo 9.9226858 dell'angolo 123°.11', ovvero del suo supplemento 56°.49'; e il logaritmo 3.0637085 di 1158; e fatta l'analogia 10000000 · 99226858 :. 30637085 ·

29863943, si rende nota la perpendicolare anzidetta in oncie $969\frac{705}{4479}$, cioè poco meno di 2 punti. Fatto per ultimo il prodotto $1158 \cdot 969\frac{1}{6}$, l'area del parallelogrammo è punti 1122296, cioè tavole 216, pied. 17, onc. 8, punti 8. Ovvero sommando il terzo, e quarto termine dell'analogia, e dalla somma 60501028 levando il logaritmo 21583625 del 144, si troverà un logaritmo 38917403, che per l'area proposta dà piedi $7793\frac{356}{357}$, cioè tavole 216, pied. 17, onc. 7, punt. 8 forse più prossimamente.

S'incontra, che due terreni hanno figura simile, e un lato di uno è pert.e 16 : 3 : 9, e pertiche 38 : 4 : 9 l'omologo dell'altro (3 : 7). Il primo costa £ 16691 : 17, si dimanda quanto costerà il secondo. Costa £ 90877 : 17.

XIII. Per logaritmi trovar l'area d'un triangolo isoscele, la di cui base è pert.e 23 : 2 : 8, e 21°. 38' l'angolo opposto.

Dunque essendo uguali gli angoli alla base, ognun d'essi sarà 79°. 11'; e dimezzata la base, sarà oncie 844, il di cui logaritmo è 29263424. Si prenda il tangilogaritmo di 79°. 11', cioè 10.7188264, e si faccia l'analogia 100000000 · 107188264 :: 29263424 · 36451688; poichè si conseguirà il logaritmo della perpendicolare che dall'angolo dato cade sopra ~~il lato~~ la base. Li due ultimi termini dell'analogia uniti insieme daranno il logaritmo 65715112 dell'area del triangolo isoscele, la quale dal numero corrispondente al logaritmo sarà espressa in punti superficiali. Ma comechè un logaritmo sì grande non si ha nelle tavole comuni: si cerchi l'area espressa in pertiche quadrate, che si dicono tavole, le quali si compongono da punti superficiali 12.12.36 = 5184; cosicchè preso il logaritmo 37146650 del 5184, e sottratto da quello dell'area, il logaritmo 28568462, che rimane, essendo nelle tavole trigonometriche determini l'area del triangolo isoscele in pertiche quadrate $719\frac{1173}{5036}$, cioè pied. 6 onc. 11, pun. 11.

Al quarto logaritmo 36451688 dell'analogia corrispondono onc. $4417\frac{414}{983}$, le quali moltiplicate con le onc. 844 metà della base, costituiscono nè più nè meno tav. 719, pied. 6, onc. 11, p. 11.

Il piede Veneto al piede Veronese ha la ragion de' numeri 55 : 54, si dimanda di quante tavole Veronesi sia più grande il campo Veneto del campo Veronese.

Di 109 unità cresce il quadrato del piede Veneto sopra il quadrato del piede Veronese, perchè il quadrato del 55 è 3025, e del 54 è 2916. Dunque 2916 : 720 :: 109 : tav. 26.32.10.8 Veronesi. Viceversa 3025 : 720 :: 109 : tav. 25.33.11.8 $\frac{404}{605}$ Venete

---

XIV. Trovar i lati d'un triangolo, che essendo descritto in un cerchio, si osserva, che un suo angolo è sotteso da un arco di 193°. 32', ed un altro da 106°. 44'; e il raggio del cerchio è oncie 4176.

Perchè gli angoli al centro sono doppj degli angoli alla circonferenza: la misura degli angoli dati sarà la metà dei loro archi; e perciò il primo angolo sarà di 96°. 46', e l'altro di 53°. 22'. Di questi due angoli si prendano i senilogaritmi 99969642, 99044291, sostituendo al primo angolo il supplemento 83°. 14'; e si raddoppj il raggio, cosicchè 39217905 sia logaritmo di 8352; e si faccia l'analogia aritmetica 100000000 · 99969642 :: 39217905 · 39187547; all'ultimo termine della quale corrispondendo il numero $8293\frac{430}{523}$, esso è il lato sotteso all'arco di 193°. 32'. Di nuovo si faccia altra analogia 100000000 · 99044291 :: 39187547 · 38231838, e si avrà il numero $6655\frac{357}{651}$, il rotto del quale scemando dell'unità il denominatore, ha il 21 per massimo divisore, e si riduce a $\frac{17}{31}$, cioè a poco di $\frac{1}{2}$. Questo numero è valore del lato sotteso all'arco di 106°. 44; e rimanendo da rinvenire il terzo lato; comechè al compimento di 360° manca l'arco di 59°. 44', e che il senilogaritmo della sua metà 29°. 52' è 96972148: così fatta la terza analogia 100000000 · 96972148 :: 39187547 · 36159695 si trova, che il terzo lato è $4130\frac{194}{1051}$, tutti e tre espressi in oncie.

Piedi 13 lineari della provincia A fanno piedi 12 lineari della provincia B; e nella provincia A si costituisce il campo da tavole 840 e da tavole 720 nella provincia B: ritrovar la ragione del campo della provincia A al campo della provincia B.

Perchè la moltitudine dè piedi è inversa della grandezza dè medesimi: il piede A al piede B avrà la ragione dè numeri 12 : 13; e perchè le superficie sono fra di se in ragione composta dei lati: il piede superficiale A al piede superficiale B avrà la ragione di 144 : 169. Le tavole poi 840, e le tavole 720, che esprimono le grandezze dè campi, sono fra di se come 7 : 6; e però componendo le due ragioni, il campo A al campo B avrà la ragione di 144·7 : 169·6; ovvero dividendo per 6 l'uno e l'altro termine, si avrà 24·7 : 169 = 168 : 169.

Alla Seconda Classe.

I. Moltiplicar fra di se li due numeri 493039 ($=79^3$), 2197 ($=13^3$); e dal loro prodotto (1083206683) estrarre la radice cubica. ($=79\cdot13=1027$.

Calcolar una campagna lunga pert.e 83 : 5 : 11, larga pert.e 67 : 4 : 7. (Tav.e 5691 : 8 : 1 : 5.

II. Estrarre la radice cubica dal numero $224\frac{2733}{6591}$. ($=\frac{493039}{2197}$). La radice cubica è $\frac{79}{13}=6\frac{1}{13}$.
Trovar la larghezza d'una campagna lunga pert.e 83 : 5 : 11, e di cui la quantità è campi 7, van. 21, tav. 21, pie. 8, onc. 1, pun. 5. (È larga pert.e 67 : 4 : 7.

III. Ridurre in quadrato un terreno di vanezze 6, tav. 23, pie. 16 : 6 : 1, ritrovando il suo lato.
Questo lato è pertiche 14, pied. 1, onc. 7.
Ridurre a termini minimi la frazione composta $\frac{54\frac{35}{41}}{728}$. Diventa $\frac{2249}{29848}=\frac{173}{2296}$

IV. Esprimere sotto le solite denominazioni di campi, vanezze & la quantità d'un corpo di terra espressa dalla frazion decimale 987. 654‴; li di cui interi sono campi.
È camp. 987, van. 15, tav. 20, pie. 31, onc. 8, pun. $1\frac{23}{25}$.

V. ~~...~~ Convertir in decimali quinte la frazione $\frac{7}{11}$. È uguale a decimali $63636^{V}.\frac{4}{11}$.

V. Sotto le solite denominazioni di campi, vanezze & determinare la quantità d'una campagna lunga pert.e 56. 7‴, cioè decimali terze, e larga pert.e 42. 11^{IV}, cioè dec.li quarte.
Si moltiplichino li due numeri 56007 · 420011; e il prodotto sarà 2352. 3556077.^{VII}, il di cui rotto è decimali settime, e gl' intieri sono tavole; e però la quantità richiesta è cam. 3, van. 6, tav. 12, pie. 12, onc. 9, pun. 7. 4703168^{VII}, ovvero $\frac{4703168}{10000000}=\frac{73487}{6250000}$ di un punto.
Estrarre la prossima radice quadrata dal numero 389 espresse da una frazione spuria, che per denominatore abbia il 97. Si uguaglia precisamente a $\sqrt{\frac{3660101}{9409}}$; prossimam.e $\frac{1913}{97}$; lasciando residuo 532.

VI. Trovar il quoziente, che nasce dal divider il numero 3133163. 2′ accompagnato da decimali prime per il numero 32. 168‴ accompagnato da decimali terze.
Perchè le decimali del divisore crescono di moltitudine delle decimali del dividendo, si aggiungano a queste tanti zeri, quanti bastano per pareggiar la moltitudine di quelle, cioè due zeri; e si faccia la divisione: poichè il quoziente 97400, che ne risulta, è il ricercato.
Sonovi due rettangoli uguali di terreno: il p.mo è lungo pert.e 19, e largo pert.e 13 : 4; l'altro è largo pert.e 14 : 5; si vorrebbe saper la lunghezza di questo in pert.e e pie.i con sua fraz.ne
L'area del primo è tav.e 259, pied. 24; la quale divisa dalla larghez.a 14 : 5 del secondo, traducendo i numeri a denominazioni omogenee $\frac{534}{36}$, $\frac{9348}{36}$, la lunghezza del secondo sarà pert.e 17, pied. 3, e $\frac{3}{89}$ di piede, come dimostra la prova ---

14 : 5
17 : 3 $\frac{3}{89}$
238
14 : 6
7 : 15
1 : 2. 74
- . 15 $\frac{3}{89}$
259 : 24 . 0

VII. Trovar in termini minimi la ragione, che hanno fra di se due restangoli, uno dè quali è lungo pertiche 36 : - : 6, largo piedi 5 : 6; l'altro è lungo pert.e 24 : 2 : 4, largo pert.e 2.
Le loro aree sono tav.e 33 : 2 : 9; tav.e 48 : 28, ovvero onc.e 14289, onc.e 21072, le quali divise per 3 loro massimo divisore, danno la ragion dè numeri 4763 : 7024.
Inalzar il 64 alla potenza quinta ($=1073741824$), e da questa estrarre la radice cubica.
Perchè il 64 è un cubo, la cui radice è 4: per questa risoluzione è strada brevissima inalzar il 4

alla potenza quinta 1024, che è la radice cubica ricercata.

VIII. *Trovar quanti giorni occorrèranno per far un argine di pert.^{e} 104 con rustici 26, dopochè con rustici 15 in giorni 12 si è fatto un argine di pert.^{e} 270.*

Il tempo è in ragion diretta col numero delle pertiche inversa col numero degli uomini; e però l'analogia composta sarà $270 \cdot 26 : 12 :: 104 \cdot 15 : 2\frac{2}{3}$; cosicchè l'argine sarà fatto in giorni $2\frac{2}{3}$.

Tradurre in vanezze, tavole, piedi, e oncie la frazione di campo $\frac{7775}{7776}$.

Si uguaglia a van. 23, tav. 29, pied. 32, onc. 8 precisamente.

Per un simile esame tenuto gli 8 Settembre 1780 terzo di quel periodo, presente S. E. Ant.^{o} Zen Savio alla Scrittura Uscito, furono prima proposte da dimostrarsi alla prima classe le proposizioni d'Euclide 17, 16, 14, 4, 9, 10 dell Libro XI; 23, 19 del VI; 35 del III. 4 del II. Alla seconda classe 16, 32, 41, 43 del I; 12 del II; 36, 20, 19 del III; 2 del VI.

In seguito furono proposti li seguenti problemi.

I. Per logaritmi. Dato il numero 4321: ritrovargli il primo, e il terzo, che siano con esso in continua ragione di $\sqrt[5]{17} : \sqrt[7]{23}$. $4865\frac{23}{35} : 4321 : 3837\frac{12}{35}$. *Farragine Matematica C pag. 50*

Per Algebra. Risolvere l'equazione $x = a - \sqrt{x}$, in cui $a = 56$.

$x = \frac{2a+1 \pm \sqrt{(4a+1)}}{2} = \frac{112+1 \pm \sqrt{(224+1)}}{2} = \begin{matrix}64\\49\end{matrix}$.

II. Per logaritmi. Dato il numero 4321: ritrovarne un altro, a cui quello abbia duplicata ragione di $\sqrt[5]{17} : \sqrt[7]{23}$. $4321 : 3407\frac{47}{35}$. *Farrag.^{e} Matem.^{ca} C pag. 51*

Per Algebra. Risolvere l'equazione $\sqrt{ax} = \frac{mn}{x}$; in cui $a = 54$; $m = 12$; $n = 9$.

$x = \sqrt[3]{\frac{m^2n^2}{a}} = \sqrt[3]{\frac{144 \cdot 81}{54}} = \sqrt[3]{\frac{11664}{54}} = \sqrt[3]{216} = 6$.

III Per logaritmi. Dato il numero 4321: ritrovarne un altro, a cui quello abbia suddupplicata ragione di $\sqrt[5]{17} : \sqrt[7]{23}$. $4321 : 4071\frac{69}{70}$. *Ibidem*

Per Algebra: Date le due analogie $a : x :: x : m$; $a - m : x :: n : z$, ritrovare il valor di di ambedue le incognite. $x = \sqrt{am}$; $z = \frac{n}{a-m}\sqrt{am}$.

IV. Per logaritmi. Dati li due numeri 9876, 2345: trovar un numero medio, a cui il primo abbia duplicata ragione di quella, che ha esso medio al secondo. $9876 : 3786\frac{1083}{1147}$; $3786\frac{1083}{1147} : 2345$ *Ibidem*

Per Algebra. Risolver l'equazione $\frac{x^2}{c} + x = a$. $x = \frac{-c \pm \sqrt{c(4a+c)}}{2}$.

V. Per logaritmi. Trovar il prodotto, che fa $\sqrt[5]{17}$ moltiplicata per la $\sqrt[7]{23}$. $2\frac{75818}{100000}$. *Ibidem pag. 52*

Per Algebra. Moltiplicar fra di se le due espressioni letterali $3ab - c^2 + ac$; $2c - 4b - a$.

$2abc - 2c^3 + 3ac^2 - 12ab^2 - 3a^2b - a^2c + 4bc^2$.

VI. Per logaritmi. Trovar il ~~prodotto~~ quoziente, che fa $\sqrt[5]{17}$ divisa per la $\sqrt[7]{23}$. $1\frac{126}{1000}$. *Ibidem.*

Per Algebra. Dividere l'espression letterale $2abc - 2c^3 + 3ac^2 - 12ab^2 - 3a^2b - a^2c + 4bc^2$, per $2c - 4b - a$.

$3ab - c^2 + ac$.

VII. Per logaritmi. Ritrovar il numero, che corrisponde al logaritmo nato dal numero 6081 inalzato al quadrato.

Il logaritmo è 36978561, a cui corrisponde il $4987\frac{167}{870}$.

Per Algebra. Risolvere l'equazione $\frac{m^2x}{n} + ab - 14 = bx - 3x + bn$. $x = \frac{n(bn + 14 - ab)}{m^2 + 3n - bn}$.

VIII. Per logaritmi. Ritrovar il numero, che corrisponde al logaritmo $\frac{85731068 - 38346750}{2}$.

Fatta l'operazione si trova il logaritmo 23692159, a cui corrisponde il 234.

Per Algebra. Dividere $p + \frac{m}{n}$ per $q - \frac{a}{c}$. Il quoziente è $\frac{cnp + cm}{cnq - an}$.

IX. Per logaritmi. Il logaritmo 38027053 è stato sottratto da un altro, ed ha lasciata la differenza −1069610: ritrovare il numero a questa corrispondente. $\frac{4963}{6349} = \frac{709}{907}$.

Per Algebra. Tradurre in numeri l'espressione letterale ---------- $\sqrt{\frac{b^2m+a^2n}{m+n}}$; in cui $a=18$, $b=42$, $m=7$, $n=33$. $\sqrt{\frac{1764\cdot 7+324\cdot 33}{7\cdot 33}} = \sqrt{\frac{23040}{40}} = 24$.

X. Per logaritmi. Ritrovar il numero, che corrisponde al logaritmo 3(8450980 + 4771212). 9261.

Per Algebra. Fare il cubo di $ax-mn$. $a^3x^3 - 3a^2mnx^2 + 3am^2n^2x - m^3n^3$.

I. Cavar la radice cubica dal numero 155634054939. 5379.

Calcolar un triangolo, la cui base pert.a 29:5:11, e pert.a 47:4:7 la perpendicolare. Tavole 716:4:6:8:6.

II. Cavar la radice quadrata dal numero 28933641. 5379.) (£9696:12.

Un terreno è campi 7, vanezze 11, tavole 17: ritrovare il suo prezzo a ragione di £1296 il campo.

III. Rabbassar a termini minimi la frazione $\frac{31668}{63648}$. $\frac{203}{408}$; il divisor massimo è 156.

Un cavamento è pertiche 1431, e piedi 4: ritrovare il suo prezzo a ragione di £45:17:6 per ogni pertiche 100. Importa £656:15:6½.

IV. Calcolar un triangolo, li di cui lati sono pert.e 17, pert.e 25, pert.e 28. Rileva Tavole 210.

Valutar il suddetto triangolo in ragione d'un dinaro l'oncia superficiale. Equivale a un soldo il piede quadrato, ovvero a £1:16 la tavola; e perciò importa £378.

V. Trovar il quoziente, che nasce dal divider $329\frac{13}{19}$ per $43\frac{7}{17}$. $\frac{106488}{14022} = 7\frac{4167}{7011}$.

Esprimer il quoziente suddetto in decimali terze. $\frac{7594}{1000} = 7\frac{594}{1000}$.

VI. Trovar sino alle decimali terze la radice cubica del 9. 2.080.

Divider l'espressione simbolica $6ab+2b^2n-3amn-bmn^2$ per $2b-mn$. $3a+bn$.

VII. Trovar il Capitale occorrente per guadagnar in mesi 11 e giorni 18 ₰ 107½ dal grosso, dopochè lo stesso guadagno si è fatto in mesi 17, e giorni 20 col Capitale di ₰ 2150. Occorrono ₰ $3274\frac{37}{87}$.

Una qualità di grano per la summa di Sacchi 31, e quarte 3 è stata comprata per £885, soldi 8, e dan.i 9; ritrovar il prezzo d'un Sacco. Detto prezo è £28:7.

VIII. Trovar il guadagno, che si farà sopra un Sacco di riso, il quale essendo stato pagato £54:16, si rivende soldi 5 per libbra, 6 delle quali costituiscono un quarterolo, che è la quarta parte d'una quarta di Minale, o sia di Stajo; e 3 Staja fanno un Sacco. Si rivende £17:4 di guadagno oltre il prezzo di sud.to

Ripartire ad una truppa di soldati 89 un bottino di £1212:12:6, ritrovando la porzione d'ognuno. £13:12:6.

IX. Cavar la radice prossima quadrata dalla frazione $\frac{89}{97}$. È maggiore di $\frac{93}{97}$, minore di $\frac{17189}{17945}$; e questa è più prossima.

Calcolar il trapezio di due lati paralleli, uno de' quali è pertiche 33:1:3; l'altro pertiche 26:4:7; e pertiche 47:4:7 la distanza di uno dall'altro. È Tavole 1432, piedi 9, oncie 1, punti 5.

11771